ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**( Н И У « Б е л Г У » )**
**Кафедра общей и прикладной физики**

**Э.Б. Кулумбаев, С.И. Кучеев, Т.Н. Алехина, В.Ю. Песик**

# ОБЩАЯ ФИЗИКА

**Учебное пособие по курсу физика для студентов очной и заочной формы обучения нефизических специальностей**

**Белгород 2017**

**УДК: 530.19**

Э.Б. Кулумбаев, С.И. Кучеев, Т.Н. Алехина, В.Ю. Песик. Общая физика. Учебное пособие по курсу физика для студентов очной и заочной формы обучения нефизических специальностей. – Белгород: Издательство БелГУ. – 2017. – 173с.

Данное учебное пособие по курсу общей физики предназначено для студентов нефизических специальностей очной и заочной формы обучения. В пособии рассмотрены темы, изучаемые в лекционном курсе, необходимые для успешного освоения лабораторного практикума и выносимые на самостоятельное изучение.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ЧАСТЬ I.
# КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Классическая механика (Механика) изучает механическое движение макроскопических тел (макротел) – изменение их относительного положения в пространстве с течением времени.

В механике понятия пространства и времени рассматриваются как первичные, поэтому их невозможно определить через какие-либо более простые понятия и на основании опытных фактов констатируются только их свойства:

- пространство непрерывно (нет начала, нет конца); эвклидово (применима геометрия Эвклида); трехмерно (положение точки определяется тремя числами); однородно (равноправность всех пространственных точек); изотропно (равноправность всех пространственных направлений);
- время непрерывно (нет начала, нет конца); однородно (равноправность всех временных моментов).

Макротело – система частиц (атомов, молекул или других частиц), расстояния между которыми много меньше характерного размера системы.

Изучить – значит установить закон движения – правило определения положения макротела в пространстве в любой момент времени в произвольно выбранной системе отсчета (**СО**) – совокупности тела отсчета (**ТО**) и способов измерения расстояния между двумя пространственными точками (для указания положения тела в пространстве) и промежутка времени между двумя временными моментами (для указания соответствующего момента времени).

При теоретическом описании рассматривается движение моделей макротел – материальной точки (**МТ**), абсолютно твердого тела (**ТТ**), сплошной среды (**СС**).

**МТ** – модель, представляющая тело геометрической точкой, материальность которой состоит в наличии у нее массы.

**ТТ** – модель, представляющая тело системой МТ с неизменными в процессе движения расстояниями между ними.

**СС** – модель, представляющая тело системой МТ, расстояния между которыми в процессе движения изменяются.

Движение любой механической системы (системы тел) сводится к движению основных моделей макротел, поэтому структура Механики, как физической теории, – это механики моделей макротел, в каждой из которых выделяют кинематику и динамику (статика – “обездвиженный” случай динамики).

Кинематика определяет способы описания движения макротела и необходимый для этого набор кинематических характеристик движения, а динамика описывает движение с учетом причин его обусловливающих.

Поскольку механическое движение содержательно только по отношению к выбранной СО, то изучение движения начинается с выбора СО. В кинематике все СО эквивалентны и выбор системы определяется только соображениями удобства. В динамике СО неэквивалентны.

# Глава 1. Движение материальной точки

## 1.1. Кинематика векторного способа описания движения материальной точки.

Кинематика векторного способа описания движения МТ основана на задании:

1. начала отсчета (любая точка ТО) радиус-вектора $\vec{r}$ – вектор, начало которого фиксировано в начале отсчета, а конец всегда совпадает с МТ (рис. 1.1а);
2. начала отсчета времени $t$ (в силу однородности времени обычно задается нулевым);
3. закона движения $\vec{r}(t)$.

Связь векторного и координатного в декартовой системе координат (**ДСК**) способов описания движения МТ осуществляется формулой:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \qquad (1.1)$$

где $x, y, z$ – проекции $\vec{r}$ на оси ДСК; $x\vec{i}, y\vec{j}, z\vec{k}$ – составляющие $\vec{r}$ вдоль осей ДСК; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты (единичные векторы), направленные вдоль осей ДСК в сторону возрастания координат (рис. 1.1а).

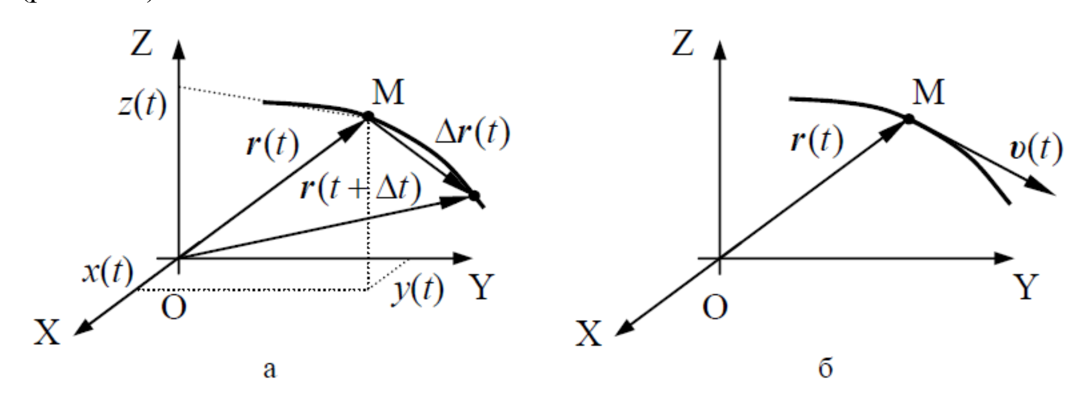



Рис. 1.1.

При движении МТ $\vec{r}$ изменяется. Линия, описываемая в пространстве концом $\vec{r}$, называется траекторией МТ. Траекторию удобно аппроксимировать ломанной с физически бесконечно малыми звеньями $d\vec{r}$ – векторами, соединяющими положения МТ в моменты времени $t$ и $t+dt$, которые называются векторами элементарных перемещений МТ на интервалах времени $(t, t+dt)$. Ясно, что $d\vec{r}$ зависит и от $t$, и от $dt$. Поэтому

$$d\vec{r} = \vec{v}(t)dt, \qquad (1.2)$$

где $\vec{v}(t)$ – вектор скорости МТ (рис. 1.1б).

Расчеты показывают, а опыт подтверждает, что вектор скорости можно вычислять как производную радиус-вектора по времени:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}; \quad v(t) = |\dot{\vec{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \qquad (1.3)$$

$\dot{x}\vec{i}, \dot{y}\vec{j}, \dot{z}\vec{k}$, $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, $\dot{z} = v_z$ – составляющие и проекции $\vec{v}$ на оси ДСК.

Тогда вектор скорости направлен по касательной к траектории в каждой ее точке, поэтому

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}(t), \qquad (1.4)$$

где $\vec{\tau}(t)$ – орт касательной; $v(t)$ – модуль скорости.

Длина $ds$ бесконечно малой дуги траектории, ограниченной положениями МТ в моменты времени $t$ и $t+dt$, называется элементарным путем, пройденным МТ за интервал времени $(t, t+dt)$. В силу малости $dt$ можно считать, что $ds$ равна длине ее стягивающей хорды: $ds = |d\vec{r}\,|$. Тогда

$$ds = v(t)dt; \qquad s_{12} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt, \tag{1.5}$$

$s_{12}$ – путь, пройденный МТ за конечный интервал времени от $t_1$ до $t_2$ – длина участка траектории, ограниченной положениями МТ в моменты времени $t_1$ и $t_2$. Поскольку модуль скорости $v(t) \geq 0$, то $s_{12} \geq 0$.

Таким образом, в выбранной СО закон движения МТ вполне определяется заданием 1) начального условия (**НУ**): $t = 0$: $\vec{r} = \vec{r}_0$ – положения МТ в начальный момент времени и 2) зависимости $\vec{v}(t)$. Тогда

$$\vec{r}(t+dt) = \vec{r}(t) + d\vec{r} = \vec{r}(t) + \vec{v}(t)dt, \tag{1.6}$$

и задача описания движения МТ сводится к определению $\vec{v}(t)$. Поэтому радиус-вектор и скорость составляют механическое состояние МТ.

Способ описания изменения вектора скорости аналогичен рассмотренному способу описания изменения радиус-вектора: вектор скорости МТ во всевозможные моменты времени откладывается от некоторой точки (начала), а изменение $\vec{v}(t)$ представляется как движение его конца – скоростной точки (**СТ**) в пространстве скоростей (рис. 1.2.):

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)dt. \tag{1.7}$$

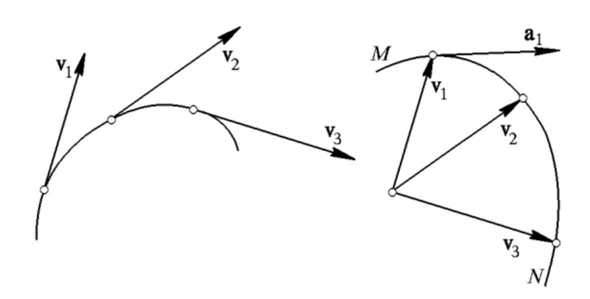



Рис. 1.2.

Тогда задание 1) НУ: $t = 0$: $\vec{v} = \vec{v}_0$ и 2) скорости $\vec{a}(t)$ СТ позволяет определить вектор скорости:

$$\vec{v}(t+dt) = \vec{v}(t) + d\vec{v} = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)dt. \tag{1.8}$$

Расчеты показывают, а опыт подтверждает, что скорость СТ, которая называется ускорением МТ, можно вычислять как производную вектора скорости по времени:

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k}; \qquad a(t) = |\dot{\vec{v}}| = \sqrt{\dot{v}_x^{\,2} + \dot{v}_y^{\,2} + \dot{v}_z^{\,2}}, \tag{1.9}$$

$\dot{v}_x = a_x, \dot{v}_y = a_y, \dot{v}_z = a_z$ – проекции $\vec{a}$ на оси ДСК.

Вектор ускорения направлен по касательной к траектории СТ (рис. 1.2). По отношению к траектории МТ разложение ускорения на составляющие имеет вид:

$$\vec{a}(t) = a_\tau(t)\,\vec{\tau}(t) + a_n(t)\,\vec{n}(t) = \dot{v}\,\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n}. \tag{1.10}$$

Здесь $\vec{a}_\tau = \dot{v}\vec{\tau}$ – касательная составляющая тангенциальное ускорение, описывает изменение модуля скорости (если $\dot{v} > 0$, то $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\tau}$; если $\dot{v} < 0$, то $\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{\tau}$); $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$ – нормальная составляющая – нормальное ускорение, описывает изменение направления вектора скорости; вектор $\vec{a}_n$ (и вектор главной нормали $\vec{n}$ в силу $\frac{v^2}{R} \geq 0$) всегда перпендикулярен к $\vec{\tau}$ в сторону "загиба" траектории – ее вогнутости (рис. 1.3). Смысл этих составляющих ускорения и определяет удобство разложения (1.10).

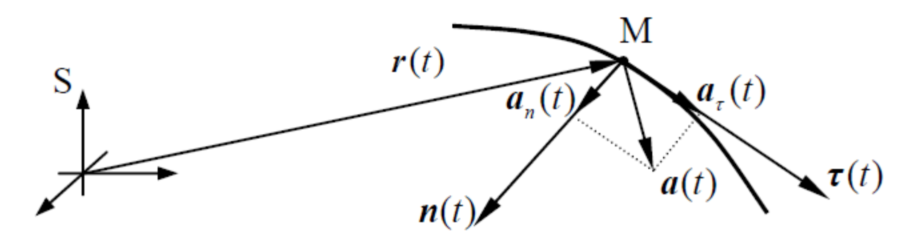



Рис. 1.3.

Задачи кинематики делятся на прямые и обратные. В прямых задачах определению подлежат кинематические характеристики по заданному закону движения. Математически решение прямых задач сводится к дифференцированию, например, по схеме:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \;\rightarrow\; \vec{v} = \dot{\vec{r}} \;\rightarrow\; \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}\,,$$

реализация которой позволяет определить любые кинематические характеристики.

В обратных задачах требуется найти закон движения по заданным кинематическим характеристикам и НУ, обеспечивающим однозначность решения. Математически решение обратных задач сводится к интегрированию, произвольные постоянные которого определяются НУ. Например, если задана временная зависимость ускорения, то схема интегрирования должна быть следующей:

$$\vec{a} = \vec{a}(t) \;\rightarrow\; \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt \;\rightarrow\; \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{v}dt\,.$$

Наиболее часто используется СО, связанная с условно неподвижным относительно наблюдателя ТО, которая называется лабораторной системой отсчета (**ЛСО**). Эффективность решения некоторых задач достигается рассмотрением движения точки по отношению к какому-либо другому телу, которое, в свою очередь, движется в ЛСО. Движение $\vec{r}_{rel}(t)$ МТ относительно подвижного тела отсчета называется относительным, а движение подвижной системы отсчета $\vec{r}_{por}(t)$ относительно ЛСО – переносным. Результирующее движение $\vec{r}(t)$ МТ относительно ЛСО называется в этом случае абсолютным. Если переносное движение поступательно (все точки подвижной СО движутся одинаково: по одинаковым траекториям с одинаковыми скоростями), то дифференцирование векторной связи $\vec{r} = \vec{r}_{por} + \vec{r}_{rel}$ дает законы преобразования (сложения) скоростей и ускорений

$$\vec{v} = \vec{v}_{por} + \vec{v}_{rel}\,, \qquad \vec{a} = \vec{a}_{por} + \vec{a}_{rel}\,. \tag{1.11}$$

*Равноускоренное движение МТ.* Закон равноускоренного ($\vec{a} = \text{const}$) движения МТ является результатом интегрирования (1.7) и (1.2) с учетом НУ ($t = 0$: $\vec{r} = \vec{r}_0$, $\vec{v} = \vec{v}_0$):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \qquad (1.12)$$

В частных случаях векторная формула (1.12) описывает хорошо известные из школьной физики законы прямолинейного (радиус кривизны прямой $R = \infty$, поэтому $\vec{a}_n = 0$) равноускоренного ($a_\tau = \text{const} > 0$) и равнозамедленного ($a_\tau = \text{const} < 0$) движений, криволинейного движения МТ в однородном поле тяжести Земли ($\vec{a} = \vec{g}$).

*Движение МТ по окружности.* Радиус кривизны окружности $R = \text{const}$. Если начало радиус-вектора МТ совместить с центром окружности, то $\vec{r} = -R\vec{n}$. При равномерном движении $\dot{v} = 0$, поэтому $\vec{a}_\tau = 0$ и $a_n = \text{const}$, но нормальное ускорение $\vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n}$ постоянным вектором не является, т.к. $\vec{n}(t)$ всегда направлен к центру окружности. Закон равномерного движения МТ по окружности определяется уравнениями (1.2) и (1.7):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

и сводится к решению так называемого уравнения гармонического осциллятора: $\ddot{\vec{\tau}} = -\omega^2\vec{\tau}$ для зависимости $\vec{\tau}(t)$ или $\ddot{\vec{n}} = -\omega^2\vec{n}$ для зависимости $\vec{n}(t)$, где $\omega = \frac{v}{R} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$ – угловая скорость: отношение угла поворота радиус-вектора, который он испытывает на элементарном пути $ds$ МТ за интервал времени $dt$, к величине этого интервала времени или скорость изменения угла, который радиус-вектор составляет с произвольно выделенным направлением *OA* (рис. 1.4).

Для последующего изложения значимым является следствие этих уравнений:

$$d(\vec{r} \times \vec{v}) = 0, \qquad (1.13)$$

которое, в свою очередь, позволяет получить представление вектора скорости в виде $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, где $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – вектор угловой скорости; $d\vec{\varphi}$ – вектор элементарного углового перемещения, направленный вдоль оси вращения – прямой, проходящей через центр окружности перпендикулярно ее плоскости (рис. 1.4). Как и выше, модуль $|d\vec{\varphi}| = \frac{ds}{R}$ равен углу поворота радиус-вектора на элементарном пути $ds$ МТ за интервал времени $dt$, а направление $d\vec{\varphi}$ образует правый винт с направлением вращения МТ и фактически задает ориентировку плоскости окружности в пространстве (рис. 1.4).




Рис. 1.4.

## 1.2. Динамика материальной точки.

Динамика материальной точки основана на законах Ньютона, сформулированных как обобщения опытных фактов и законах для сил – модельных представлений о взаимодействии тел.

Законы Ньютона являются основными законами (принципами) классической нерелятивистской механики.

В динамике, в отличие от кинематики, СО неэквивалентны. Первостепенное значение имеет инерциальная система отсчета (**ИСО**), существование которой постулируется первым законом Ньютона.

*Первый закон Ньютона*: существует такая СО, относительно которой не подверженная воздействию (свободная) МТ движется прямолинейно и равномерно или покоится:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t\,. \tag{1.14}$$

*Второй закон Ньютона* – в ИСО ускорение МТ равно сумме всех сил, действующих на МТ, деленной на массу МТ:

$$\vec{a}(t) = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m}\,. \tag{1.15}$$

Здесь $m$ – инертная масса – мера инертности (сопротивляемости) МТ изменению своего механического состояния – скорости: чем больше масса МТ, тем меньшее ускорение она приобретает под действием заданной силы.

*Третий закон Ньютона* – силы взаимодействия двух МТ парные, одной природы, приложены к разным МТ, равны по величине, направлены противоположно и лежат на прямой, соединяющей МТ.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{1.16}$$

Закон (1.16) утверждает равенство сил в один и тот же момент времени, допуская тем самым мгновенность распространения взаимодействия двух МТ на расстоянии, что является приемлемым приближением только для медленных изменений механических состояний МТ.

*Уравнение движения* – это второй закон Ньютона, записанный в векторном виде:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad \text{или} \quad \begin{cases} m\dot{\vec{v}} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) \\ \dot{\vec{r}} = \vec{v} \end{cases} \tag{1.17}$$

или в проекциях на любую ось как результат скалярного произведения левой и правой частей векторного уравнения движения на орт направления выбранной оси. Для нахождения закона движения это уравнение необходимо дополнить НУ:

$$t = 0: \; \vec{r} = \vec{r}_0, \;\; \vec{v} = \vec{v}_0. \tag{1.18}$$

## 1.3. Законы сил

В механике происхождение сил не устанавливается, поэтому природа сил может быть различной, а определение сил сводится к указанию способа измерения и наблюдаемых свойств сил. Сила может быть измерена статически: путем уравновешивания измеряемой силы эталонной силой или динамически: по ускорению, которое она вызывает. Для сил справедлив принцип суперпозиции, в основе которого лежит представление о независимости действия сил. Структурой уравнения движения (1.17) допускается только, что в общем случае сила может зависеть от времени, положения и скорости МТ.

Феноменологически силы делятся на полевые (гравитационные, электромагнитные – силы воздействия со стороны соответствующих полей) и контактные (упругие силы, силы трения). Здесь необходимо помнить, что, в конечном счете, на микроуровне, природа

контактных сил также является полевой и обусловлены они электромагнитным взаимодействием заряженных частиц (электроны, ядра), составляющих макротела.

Гравитационные силы – закон всемирного тяготения (рис. 1.5)

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}. \tag{1.19}$$

Здесь $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² – гравитационная постоянная; $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – радиус-вектор 2-ой МТ относительно 1-ой.

В (1.19) масса МТ выступает как источник (МТ создает поле тяготения, пропорциональное ее массе) и объект действия (МТ испытывает воздействие поля тяготения, пропорциональное ее массе) поля тяготения, и поэтому называется гравитационной. Опыт показывает, что инертная и гравитационная массы равны. Поэтому, например, ускорение МТ в поле тяжести не зависит от ее массы. Сила тяжести в приближении однородности гравитационного поля вблизи поверхности Земли:

$$\vec{F} = m\vec{g}\,; \tag{1.20}$$

$\vec{g}$ – ускорение свободного падения МТ относительно Земли.

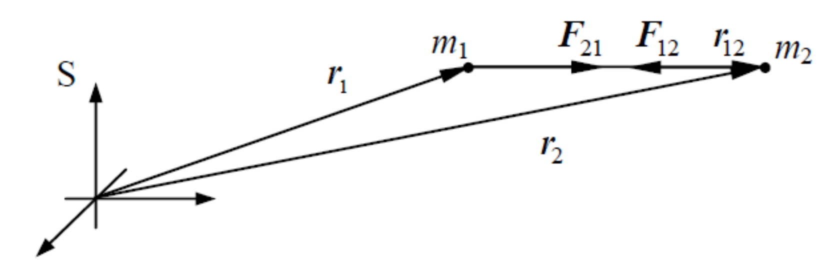



Рис. 1.5.

Упругие силы – силы, подчиняющиеся закону Гука: деформация тела прямо пропорциональна величине вызывающей ее силы, в частности, при деформации растяжения (сжатия) упругого стержня (пружины, резинового шнура)

$$F = k\,\Delta l\,, \tag{1.21}$$

$\Delta l = l - l_0$ – абсолютное удлинение стержня; $k$ – коэффициент жесткости стержня, который зависит от материала и размеров стержня.

Силы трения делятся на:

– *сила нормального давления (реакции опоры)* $\vec{N}_\perp$ – контактная сила взаимодействия тел вдоль направления нормали к плоскости соприкосновения.

– *сила вязкого (внутреннего) трения* $\vec{F}_v$ – противодействие вязкой (жидкой или газообразной) среды движущемуся в ней телу, в частности, при малой величине скорости $\vec{v}_r$ тела относительно среды:

$$\vec{F}_v = -\eta\vec{v}_r\,, \tag{1.22}$$

$\eta$ – коэффициент вязкого (внутреннего) трения.

– *сила трения покоя* $\vec{F}_{fr0}$ – сила сухого трения при отсутствии относительного движения взаимодействующих тел.

– *сила трения скольжения* $\vec{F}_{fr}$ – сила сухого трения при наличии относительного движения взаимодействующих тел.

Эмпирический закон Амонтона–Кулона свойств силы сухого трения:

1) $0 \le F_{fr0} \le F_{fr\max}$ – модуль силы сухого трения покоя принимает значения от нуля до некоторого своего максимального значения;
2) $F_{fr} = F_{fr\max}$ – модуль силы сухого трения скольжения равен максимальному значению модуля силы сухого трения покоя;
3) $F_{fr} = \mu N_{\perp}$ – модуль силы сухого трения скольжения пропорционален модулю силы нормального давления, $\mu$ – коэффициент трения скольжения, не зависящий от силы нормального давления, а только от вещества и состояния поверхностей трущихся тел;
4) $\vec{F}_{fr} \uparrow\downarrow \vec{v}_r$ – сила сухого трения скольжения направлена противоположно направлению скорости $\vec{v}_r$ относительного движения тел.

Возможны две постановки задач динамики:

1) по заданному закону движения определить силу, обеспечивающую данное движение МТ. Математически решение этой задачи сводится к дифференцированию по схеме:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \;\rightarrow\; \vec{v} = \dot{\vec{r}} \;\rightarrow\; \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \;\rightarrow\; \vec{F} = m\vec{a}\,;$$

2) по заданным силе и НУ найти закон движения. В математике такая задача называется задачей с НУ или задачей Коши, а ее решение сводится к интегрированию, произвольные постоянные которого определяются НУ. Например, для одномерного движения МТ вдоль оси $x$ схемы интегрирования в простейших случаях зависимостей силы только от $t$ или $x$ или $v$ имеют вид:

а) $$F = F(t) \;:\quad a(t) = \frac{F(t)}{m} \;\rightarrow\; v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt \;\rightarrow\; x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt \;\rightarrow\; x = x(t).$$

б) $$F = F(x) \;:\quad m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = F(x) \;\rightarrow\; mv\frac{dv}{dx} = F(x) \;\rightarrow\; \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^{x} F(x)dx \;\rightarrow$$

$$v = v(x) \;\rightarrow\; t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)} \;\rightarrow\; x = x(t).$$

в) $$F = F(v) \;:\quad m\frac{dv}{dt} = F(v) \;\rightarrow\; m\frac{dv}{F(v)} = dt \;\rightarrow\; m\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{F(v)} = t - t_0 \;\rightarrow\; v = v(t) \;\rightarrow$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\,dt \;\rightarrow\; x = x(t).$$

Основная задача динамики (нахождение закона движения) обобщается для системы МТ в виде системы взаимосвязанных уравнений движения:

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, ..., \dot{\vec{r}}_N) \qquad (1.23)$$

и НУ:

$$t = 0: \; \vec{r}_\alpha = \vec{r}_{\alpha 0}, \quad \dot{\vec{r}}_\alpha = \dot{\vec{r}}_{\alpha 0} \qquad (1.24)$$

для каждой МТ; $\alpha = 1, ..., N$ – номер МТ.

## 1.4. Принцип относительности Галилея.

Принцип относительности Галилея утверждает полное равноправие всех ИСО по отношению к механическим явлениям. Это значит, что законы Ньютона остаются

неизменными (инвариантными) при переходе от одной ИСО к другой. В соответствии с формулой (1.11) преобразования ускорения МТ при переходе от ЛСО к движущейся относительно нее поступательно СО получим: $\vec{a} = \vec{a}_{rel}$, если $\vec{a}_{por} = 0$. Поэтому движущаяся относительно ИСО неускоренно СО сама является ИСО: ускорение $\vec{a}_{rel} = 0$ свободной МТ (как и в ЛСО, где $\vec{a} = 0$). Неизменность сил при переходе от одной ИСО к другой обусловлена их зависимостью только от взаимного расположения МТ и их относительных скоростей – величин инвариантных, т.е. одинаковых в разных СО.

Одинаковость уравнений движения не означает одинаковости движений в различных ИСО (например, если в одной ИСО МТ покоится, то в движущейся относительно нее ИСО эта же МТ будет иметь уже ненулевую скорость). Это связано с тем, что в различных ИСО разными будут НУ.

# <u>Глава 2.</u> Законы сохранения

Основные задачи (1.17) – (1.18) динамики МТ или (1.23) – (1.24) динамики системы МТ являются 1) математически сложными настолько, что аналитические решения достижимы только в простейших случаях; 2) неосуществимыми при неизвестных законах сил; 3) нереализуемыми при описании молекулярного (теплового) движения систем большого числа МТ. Поэтому особенно важными становятся следствия законов Ньютона, обеспечивающие более универсальный подход к полному или частичному решению динамических задач за счет выбора новых динамических переменных. Такими следствиями являются законы изменения и сохранения импульса, энергии и момента импульса – динамических величин, которые при движении изолированных или замкнутых механических систем не изменяются с течением времени. Законы сохранения устанавливают общие свойства механического движения без решения уравнений движения и конкретизации законов действующих сил. Они применимы и в том случае, когда эти силы неизвестны вовсе, или даже в том случае, когда ньютоновская постановка описания движения вообще теряет смысл.

В механике законы изменения и сохранения импульса, энергии и момента импульса являются строгими следствиями законов Ньютона. Они согласовываются с обобщающими все известные опытные факты универсальными общефизическими законами сохранения этих величин.

## 2.1. Законы изменения и сохранения импульса

На основе опытных фактов второй закон Ньютона в виде (1.15) утверждает, что ускорение МТ пропорционально результирующей силе и обратно пропорционально массе МТ. Простое преобразование (1.15) при условии $m = \text{const}$ позволяет установить динамическую величину – импульс МТ (2.1), скорость изменения которого определяется только силой (2.2) (действие силы на МТ унифицируется относительно массы МТ в терминах импульса). В выбранной СО импульсом МТ называется векторная величина, равная произведению массы МТ на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}\ . \qquad (2.1)$$

Тогда закон изменения импульса МТ (второй закон Ньютона)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{2.2}$$

Закон (2.2) показывает, что элементарное приращение импульса $d\vec{p}$ определяется импульсом силы $\vec{F}dt$ за элементарный промежуток времени. Импульс силы является временной характеристикой силы, учитывающей не только величину силы, но и время ее действия.

Закон сохранения импульса МТ

$$\vec{F} = 0: \quad \vec{p} = \vec{p}_0\,, \tag{2.3}$$

где $\vec{p}_0$ – неизменное со временем значение импульса, которое определяется НУ.

Закон изменения импульса системы МТ получается суммированием законов (2.2) изменения импульсов всех МТ системы, под действием сил $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{ex} + \vec{F}_\alpha^{in}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ex}\,; \tag{2.4}$$

импульс системы МТ изменяется под действием только внешних сил, внутренние силы импульса системы изменить не могут.

Здесь $\vec{p} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha$ – импульс системы МТ (сумма импульсов всех МТ, составляющих систему); $\vec{F}^{ex} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{ex}$ – сумма всех внешних сил, действующих на МТ системы; $\vec{F}^{in} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{in} = \sum_\alpha \vec{F}_{\alpha\beta}$ – сумма всех внутренних сил – сил попарного взаимодействия МТ системы между собой равна нулю в силу третьего закона Ньютона (1.16).

Закон сохранения импульса для системы МТ:

$$\vec{F}^{ex} = 0: \quad \vec{p} = \vec{p}_0\,, \tag{2.5}$$

где $\vec{p}_0$ – неизменное со временем значение импульса системы МТ определяется НУ.

Система МТ называется изолированной, если все $\vec{F}_\alpha^{ex} = 0$; замкнутой, если $\sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{ex} = 0$.

Если импульс системы МТ представить в виде $\vec{p} = m\vec{v}_C$, где $m = \sum_\alpha m_\alpha$ – масса системы МТ; $\vec{v}_C = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha}{m}$ – скорость центра масс (**ЦМ**) – геометрической точки, радиус-вектор которой $\vec{r}_C = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha}{m}$, то закон изменения импульса (2.4) формулируется как теорема о движении ЦМ:

$$m\frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}^{ex}\,, \tag{2.6}$$

т.е. ЦМ системы МТ движется как МТ с массой равной массе системы МТ под действием суммы всех внешних сил, действующих на МТ системы. Тогда ЦМ изолированной или замкнутой системы МТ движется прямолинейно и равномерно или покоится.

Закон преобразования импульса системы МТ при переходе от ЛСО $S$ к движущейся относительно нее со скоростью $\vec{V}$ системе $S'$:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + m\vec{V}\,,$$

где $\vec{p},\ \vec{p}\,'$ – импульсы системы МТ в $S$ и $S'$ соответственно, $m = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$ – масса системы МТ; показывает, что всегда существует система $S'$, в которой импульс $\vec{p}\,' = 0$. Скорость этой системы равна $\vec{V} = \vec{p}/m = \vec{v}_C$. Поэтому такая система называется системой центра масс (**СЦМ**). Скорость ЦМ имеет смысл скорости движения системы МТ как целого.

Таким образом, целесообразность введения импульса обусловлена его основными свойствами, выраженными законами (2.4) (или (2.6) в терминах ЦМ) и (2.5): 1) внутренние силы, какими бы они не были, импульса системы не изменяют; 2) при $\vec{F}^{ex} = 0$ импульс системы остается неизменным независимо от движения МТ системы.

## 2.2. Законы изменения и сохранения энергии

Векторное уравнение движения (1.17) в проекциях на орты $\vec{\tau}$ касательной и $\vec{n}$ главной нормали в произвольной точке траектории МТ:

$$\begin{cases} m\dot{v} = F_{\tau} & (2.7а) \\ m\dfrac{v^2}{R} = F_n, & (2.7б) \end{cases}$$

показывает, что модуль скорости изменяется под действием проекции $F_{\tau}$ силы на направление $\vec{\tau}$, а направление скорости – под действием проекции $F_n$ силы на направление $\vec{n}$. Тогда можно считать (2.7а) определяющим функцию $v(t)$, по которой находится новое положение МТ в направлении $\vec{\tau}$ за время движения $dt$ и модуль скорости в этом положении, а (2.7б) – кривизну траектории – величину, равную обратному значению радиусу кривизны, и имеющей смысл скорости поворота касательной на единицу длины траектории, т.е., в конечном счете, по кривизне находится направление $\vec{\tau}$ в новом положении МТ.

Структура (2.7а) позволяет ввести новую динамическую переменную: кинетическую энергию $E_k = \dfrac{mv^2}{2}$ МТ (унифицируется действие составляющей силы, изменяющей модуль скорости), закон изменения которой имеет вид:

$$dE_k = \delta A \quad \text{или} \quad \dot{E}_k = N\,, \tag{2.8}$$

где $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_{\tau} ds$ – элементарная работа силы $\vec{F}$ при перемещении $d\vec{r}$ МТ (или точки приложения силы и тогда работа является пространственной характеристикой этой силы); $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$ – мощность силы – это работа, совершаемая силой за единицу времени.

Элементарная работа силы является скалярной алгебраической величиной: $\delta A > 0$ ( $\delta A < 0$), если угол между $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ острый (тупой). В первом случае работа силы увеличивает кинетическую энергию МТ ($F_{\tau}$ обеспечивает тангенциальное ускорение $a_{\tau} > 0$, увеличивающее модуль скорости), а во втором – уменьшает ($a_{\tau} < 0$). Ясно также, что $\delta A = 0$, если $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ перпендикулярны или $d\vec{r} = 0$ (МТ, на которую действует сила, вообще не перемещается).

Работа силы $\vec{F}$ при конечном перемещении равна сумме элементарных работ $\delta A$ при перемещениях $d\vec{r}$, вся совокупность которых составляет траекторию МТ из начального положения (точка 1) в конечное положение (точка 2) МТ:

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} \,, \qquad (2.9)$$

т.е. является интегралом, вычисляемым вдоль траектории. Поэтому величина $A_{12}$ силы $\vec{F}$ зависит не только от начального и конечного положений МТ, но и от траектории ее движения. Поскольку $\delta A$ – алгебраическая величина, то и работа $A_{12}$ при конечном перемещении является алгебраической величиной: если $A_{12} > 0$ ($A_{12} < 0$), то кинетическая энергия МТ в конечном (начальном) положении МТ больше чем в начальном (конечном) в соответствии с интегральной формой теоремы о кинетической энергии (2.8): $E_{k2} - E_{k1} = A_{12}$.

На основании опытных данных силы в механике классифицируются на потенциальные и непотенциальные.

Потенциальной $\vec{F}^{\,p}$ называется стационарная (не зависящая от времени явно) сила, работа которой не зависит от траектории движения МТ. Поэтому работа потенциальной силы по замкнутой траектории равна нулю. Эти равносильные свойства обеспечиваются равенством:

$$\delta A = -dE_p \,, \qquad (2.10)$$

где $E_p(\vec{r})$ – потенциальная энергия (математически это первообразная $\vec{F}^{\,p} \cdot d\vec{r}$, взятая со знаком минус). Поэтому убыль потенциальной энергии есть работа потенциальной силы при перемещении из начального положения в конечное по произвольной траектории:

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2} \,. \qquad (2.11)$$

В виду неоднозначности (добавление постоянной к $E_p(\vec{r})$ не изменяет работы) потенциальная энергия физического смысла не имеет; в соответствии (2.11) смысл имеет только ее убыль $E_{p1} - E_{p2}$. Поэтому потенциальную энергию удобно нормировать, поставив условие: $\vec{r} = \vec{r}_0$: $E_p = E_{p0}$. Часто полагается $E_{p0} = 0$, тогда нормированная таким образом энергия $E_p(\vec{r})$ уже имеет смысл, она равна работе силы $\vec{F}^{\,p}$ при перемещении МТ из точки $\vec{r}$ в точку $\vec{r}_0$.

***<u>Примеры потенциальных сил</u>*:**

– ***постоянная сила*** $\vec{F} = \vec{F}_0 = \text{const}$: $A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = \vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ – работа постоянной силы не зависит от траектории точки приложения (например, сила тяжести, работа которой $A_{12} = mg(z_1 - z_2) = mgh$, см. рис. 2.1а);

– ***центральная сила*** $\vec{F} = F(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$: $A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} F(r)\dfrac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} F(r)dr = f(r_2) - f(r_1)$ – работа центральной силы с неподвижным силовым центром, совмещенным с началом СО, зависит лишь от расстояний до силового центра; из рис. 2.1.б видно, что работа центральной силы при перемещении МТ из точки *1* в точку *2* равна работе при перемещении МТ из точки *1* в точку *3*.




Рис. 2.1.

Нахождение потенциальной энергии основано на представлении (2.10) элементарной работы потенциальной силы в виде убыли некоторой скалярной функции, которая и является искомой потенциальной энергией. Вычисление силы по заданной потенциальной энергии производится по формуле: $F_\tau = -dE_p / ds$, где $F_\tau$ – проекция потенциальной силы на произвольное направление, в котором энергия испытывает приращение $dE_p$ при смещении на $ds$. Тогда вектор силы: $\vec{F}^p = -\mathrm{grad}\, E_p(\vec{r})$, в которой градиент энергии в ДСК выражается формулой $\mathrm{grad}\, E_p(\vec{r}) = \vec{i}\,\dfrac{\partial E_p(\vec{r})}{\partial x} + \vec{j}\,\dfrac{\partial E_p(\vec{r})}{\partial y} + \vec{k}\,\dfrac{\partial E_p(\vec{r})}{\partial z}$ – вектор, показывающий направление наибыстрейшего возрастания функции $E_p(\vec{r})$.

Непотенциальной называется сила, работа которой зависит не только от начального и конечного положений МТ, но и от траектории ее движения. Эта зависимость объясняется тем, что сами непотенциальные силы зависят от относительных скоростей. Например, силы трения, которые всегда возникают парами при взаимодействии двух тел. Так, работа силы (1.22) сопротивления (вязкого трения) при движении тела с относительной скоростью $\vec{v}_r$ в среде: $A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} (-\eta\,\vec{v}_r)\cdot\vec{v}_r\, dt = -\int_{(1)}^{(2)} \eta\, v_r^2\, dt < 0$. Или силы сухого трения: 1) пара сил трения покоя, работа которых всегда равна нулю: $\delta A = \vec{F}_{fr01}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{fr02}\cdot d\vec{r}_2 = (\vec{F}_{fr01} + \vec{F}_{fr02})\cdot d\vec{r}_1 = (\vec{F}_{fr01} - \vec{F}_{fr01})\cdot d\vec{r}_1 = 0$, т.к. парно взаимодействуют ($\vec{F}_{fr02} = -\vec{F}_{fr01}$) два неподвижных относительно друг друга тела ($d\vec{r}_1 = d\vec{r}_2$); 2) пара сил трения скольжения, работа которых при любых движениях тел всегда отрицательна: $\delta A = \vec{F}_{fr1}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{fr2}\cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{fr1}\cdot(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{F}_{fr1}\cdot(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\,dt = \vec{F}_{fr1}\cdot\vec{v}_r\, dt < 0$. К непотенциальным относятся также гироскопические силы. Гироскопической называется сила, работа которой при любом перемещении точки приложения равна нулю. Поэтому всегда $\vec{F}^g \perp \vec{v}$, например, магнитная составляющая силы Лоренца $\vec{F}^g = q\vec{v}\times\vec{B}$. Непотенциальные силы, работа которых всегда отрицательна $\delta A^d < 0$, называются диссипативными.

Такая классификация сил позволяет записать закон изменения механической энергии:

$$dE = \delta A^d \text{, причем } \delta A^d < 0. \qquad (2.12)$$

Здесь $E = E_k + E_p$ – полная механическая энергия МТ (сумма кинетической и потенциальной энергий), которая при действии диссипативных сил убывает с течением времени.

С точки зрения, общефизического закона сохранения энергии (энергия не создается, не уничтожается, а переходит из одного вида в другой) это означает превращение механической

энергии в другой вид энергии, например, в тепло при действии сил трения. С учетом такого превращения при условии, что все тепло идет только на увеличение внутренней энергии $U$ тела (т.е. $dU = \delta Q = -\delta A^d$), закон убывания механической энергии становится законом сохранения энергии: $d(E+U) = \delta Q + \delta A^d = 0$.

Законы (2.8) и (2.12) для системы МТ обобщаются в виде:

$$dE_k = \delta A^{in} + \delta A^{ex}, \qquad (2.13)$$

$$dE = \delta A^{in\,d} + \delta A^{ex\,d}, \qquad (2.14)$$

где $E_k = \sum_\alpha \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2}$ – кинетическая энергия системы МТ (сумма кинетических энергий всех МТ системы); $E = E_k + E_p$ – полная механическая энергия системы МТ; $E_p = \sum_\alpha E_{p\alpha}(\vec{r}_\alpha)$ – потенциальная энергия системы МТ (сумма потенциальных энергий всех МТ системы); $\delta A^{in} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{in} \cdot d\vec{r}_\alpha$, $\delta A^{ex} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{ex} \cdot d\vec{r}_\alpha$, $\delta A^{in\,d} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{in\,d} \cdot d\vec{r}_\alpha$, $\delta A^{ex\,d} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha^{ex\,d} \cdot d\vec{r}_\alpha$ – сумма элементарных работ всех внутренних, внешних, внутренних диссипативных, внешних диссипативных сил соответственно. Поэтому кинетическая и полная механическая энергии системы МТ изменяются под действием и внутренних, и внешних сил.

## 2.3. Законы изменения и сохранения момента импульса

При рассмотрении равномерного движения МТ по окружности отмечена формула (1.13) означающая, что величина $\vec{r} \times \vec{v}$ при таком движении не изменяется с течением времени. В динамике эту величину следует дополнить инертной характеристикой МТ, ее массой $m$ в виде множителя. Поэтому $\vec{r} \times m\vec{v}$ есть векторная величина, не изменяющаяся со временем при равномерном движении МТ по окружности. Направление этого вектора образует правый винт с направлением вращения МТ и фактически задает ориентировку плоскости окружности в пространстве, а модуль определяет угловую скорость вращения $|\vec{r} \times m\vec{v}| = mrv = mr^2\omega$, где $I = mr^2$ называется моментом инерции МТ относительно оси вращения. Поэтому целесообразным оказывается введение двух новых динамических величин: моментов импульса (вращательного импульса) и силы. Моментом импульса (силы) относительно точки – начала $\vec{r}$ называется векторная величина

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \;\; (\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}). \qquad (2.15)$$

Отметим следующие из определения свойства момента силы относительно начала $\vec{r}$ (свойства момента импульса будут аналогичными в виду однотипности определений):

– модуль момента силы относительно начала $\vec{r}$ равен произведению модуля силы на плечо силы – длину перпендикуляра, опущенного из начала $\vec{r}$ на линию действия силы; поэтому величина момента силы не изменяется при переносе точки приложения силы в любую другую точку, расположенную на линии действия силы (прямой, на которой лежит $\vec{F}$);

– суммарный момент сил относительно начала $\vec{r}$ равен моменту их равнодействующей относительного того же начала, если линии действия сил пересекаются в одной точке;

– момент пары сил (две равные антипараллельные силы) равен моменту одной из этих сил относительно точки приложения другой; момент пары не зависит от начала $\vec{r}$ (если силы действуют вдоль одной прямой, то момент пары сил равен нулю).

Законом изменения момента импульса МТ (или уравнением моментов) относительно неподвижного начала $\vec{r}$ называется дифференциальная связь:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}\,, \qquad (2.16)$$

между моментами, которая устанавливается с помощью второго закона Ньютона.

Закон сохранения $\vec{L} = \vec{L}_0 = \mathrm{const}$ момента импульса МТ выполняется, например, при движении МТ в поле центральной силы, момент которой относительно центра силы тождественно равен нулю. Из постоянства $\vec{L}$ следует, что 1) под действием центральной силы МТ всегда движется по плоской траектории, плоскость которой проходит через центр силы и перпендикулярна постоянному вектору $\vec{L}_0$, определяемому НУ; 2) за равные времена радиус-вектор $\vec{r}$ МТ описывает (заметает) одинаковые по размеру площади – закон площадей.

Уравнение моментов МТ относительно неподвижной оси – это проекция уравнения (2.16) на ось, проходящую через начало $\vec{r}$. Например, уравнение моментов МТ относительно оси $x$:

$$\dot{L}_x = M_x\,, \qquad (2.17)$$

где проекции $L_x, M_x$ моментов на ось называются моментами импульса и силы относительно неподвижной оси.

В частном случае, для движения МТ по окружности уравнение моментов относительно оси (2.17) вращения МТ – прямой, проходящей через центр окружности и перпендикулярной ее плоскости, запишется в виде:

$$I\frac{d\omega}{dt} = M_x\,.$$

Для системы МТ уравнение моментов относительно начала $\vec{r}$ обобщается в виде:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ex}\,, \qquad (2.18)$$

где $\vec{L} = \sum\limits_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha$ – момент импульса системы МТ (сумма моментов импульсов всех МТ относительно одного начала); $\vec{M}^{ex} = \sum\limits_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha^{ex}$ – сумма моментов всех внешних сил, действующих на МТ системы, относительного того же начала. Сумма моментов всех внутренних сил равна нулю, т.к. в соответствии с третьим законом Ньютона пары сил попарного взаимодействия МТ действуют вдоль одной прямой.

Закон сохранения момента импульса для системы МТ:

$$\vec{M}^{ex} = 0: \quad \vec{L} = \vec{L}_0 = \mathrm{const}\,; \qquad (2.19)$$

Поэтому момент импульса изолированной системы МТ не изменяется с течением времени.

Момент импульса системы МТ относительно неподвижного начала, как и ее импульс, изменяется под действием только внешних сил; внутренние силы момент импульса системы изменить не могут.

Уравнение моментов относительно оси для системы МТ

$$\dot{L}_\parallel = M_\parallel\,; \qquad (2.20)$$

нижний индекс $\parallel$ обозначает проекцию на ось.

В частном случае, для движения системы МТ, движущихся по окружностям различных радиусов, но с одинаковыми угловыми скоростями, уравнение моментов относительно оси вращения системы МТ запишется в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(I_{\parallel}\omega_{\parallel}\right)=M_{\parallel}, \qquad (2.21)$$

где величина $I_{\parallel}=\sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\perp\alpha}^{2}$ называется моментом инерции системы МТ относительно оси вращения; $r_{\perp\alpha}$ – радиус окружности – расстояние МТ с номером $\alpha$ до оси вращения.

Следует отметить, что уравнение моментов (2.21) структурно не изменится, если МТ будут дополнительно к вращению совершать аксиальное (вдоль оси) и радиальное (от или к оси) движение; в этом случае момент инерции системы МТ относительно оси становится тогда переменной величиной. Если $M_{\parallel}=0$, то момент импульса системы МТ относительно оси сохраняется: $I_{\parallel}\omega_{\parallel}=\text{const}$, поэтому при уменьшении момента инерции $I_{\parallel}$ угловая скорость $\omega_{\parallel}$ возрастает или наоборот, что используется на практике, например, акробатами, фигуристами.

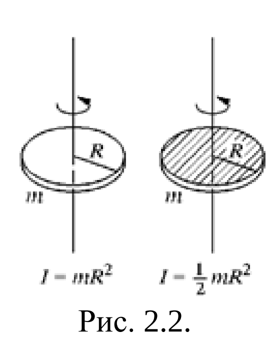


Рис. 2.2.

Для неизменяемой системы МТ (например, ТТ) ее момент инерции остается постоянным ($I_{\parallel}=\text{const}$), поэтому (2.21) примет вид: $I_{\parallel}\dot{\omega}_{\parallel}=M_{\parallel}$, которое называется основным уравнением динамики вращательного движения ТТ, момент инерции которого относительно оси вращения вычисляется по формуле: $I_{\parallel}=\int r_{\perp}^{2}dm$. Момент инерции ТТ относительно оси зависит не только от массы, но и от ее распределения относительно оси (см., например, рис. 2.2 для обруча и сплошного диска). Момент инерции ТТ является мерой инертности при вращательном движении ТТ.

# <u>Глава 3.</u> Движение абсолютно твердого тела

## 3.1. Кинематика абсолютно твердого тела

Кинематика абсолютно твердого тела как и кинематика МТ, определяет способы описания движения ТТ и вычисления положения, скорости и ускорения любой точки тела в любой момент времени по заданному закону движения. Под точкой ТТ следует понимать физически бесконечно малый элемент объема ТТ, который можно рассматривать как МТ с массой $dm$. Вся совокупность таких элементов должна составить ТТ. Поэтому определения всех выше рассмотренных величин для системы МТ легко видоизменяются для ТТ путем замен: 1) знака $\sum$ суммирования на знак $\int$ интеграла; 2) массы $m_{\alpha}$ на $dm$; у остальных величин индекс $\alpha$ следует опустить.

Пространственное положение ТТ задается положениями любых трех, не лежащих на одной прямой, точек ТТ относительно начала СО, поскольку фиксация положений этих точек исключает любое движение ТТ в выбранной СО. Девять координат этих точек связаны тремя условиями неизменности попарных расстояний между ними (связями). Поэтому число степеней свободы – число независимых величин (координат) однозначно определяющих положение ТТ равно шести, из которых, например, первые три задают положение одной из

трех точек ТТ, а оставшиеся три – положения двух других точек ТТ относительно первой (шесть координат с тремя связями). Ясно, что наиболее рациональным в большинстве динамических задачах будет выбор одной из трех точек в ЦМ ТТ, уравнение движения (2.6) которого известно. Тогда радиус-вектор $\vec{r}$ произвольной точки ТТ

$$\vec{r} = \vec{r}_C + \vec{r}\,', \tag{3.1}$$

где $\vec{r}_C = \dfrac{1}{m}\int \vec{r}dm$ – радиус-вектор ЦМ ТТ; $\vec{r}\,'$ – радиус-вектор произвольной точки ТТ относительно ЦМ, причем $|\vec{r}\,'| = \mathrm{const}$.

Приращение $d\vec{r}$ радиус-вектора произвольной точки ТТ

$$d\vec{r} = d\vec{r}_C + d\vec{r}\,' = d\vec{r}_C + d\vec{\varphi}\times\vec{r}\,'. \tag{3.2}$$

Поэтому мгновенное (в данный момент времени) распределение скоростей точек ТТ описывается формулой Эйлера:

$$\vec{v} = \vec{v}_C + \vec{\omega}\times\vec{r}\,', \tag{3.3}$$

где $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ – вектор угловой скорости.

Формула (3.2) показывает, что приращение $d\vec{r}$ произвольной точки ТТ складывается из элементарного перемещения $d\vec{r}_C$, которое может интерпретироваться как бесконечно малый параллельный перенос всех точек ТТ (поступательное движение), и элементарного приращения $d\vec{r}\,' = d\vec{\varphi}\times\vec{r}\,'$, соответствующего бесконечно малому угловому перемещению $d\vec{\varphi}$ ТТ вокруг нового положения ЦМ (вращательное движение).

При поступательном движение ТТ любой выделенный в теле отрезок остается все время параллельным самому себе (рис. 3.1): закон движения $\vec{r}_{\text{A}}(t)$ какой-либо точки А определяет закон движения $\vec{r}_{\text{B}}(t) = \vec{r}_{\text{A}}(t) + \vec{r}_{\text{AB}}$ любой точки В, т.к. $\vec{r}_{\text{AB}} = \mathrm{const}$. Поэтому $\vec{v}_{\text{B}}(t) = \vec{v}_{\text{A}}(t)$ и $\vec{a}_{\text{B}}(t) = \vec{a}_{\text{A}}(t)$.

При вращательном движении ТТ вокруг оси все точки тела, за исключением лежащих на оси вращения, движутся по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, с центрами на оси вращения (рис. 3.2 а). Вектор угловой скорости $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ задает 1) ориентацию оси вращения в пространстве; 2) направление вращения (по правилу правого винта); 3) скорость $\vec{v}_{\text{A}} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{\text{A}}$ ($v_{\text{A}} = \omega r_{\text{A}}\sin\alpha = \omega\rho$) любой точки А тела. Ускорение $\vec{a}_{\text{A}} = \dot{\vec{v}}_{\text{A}} = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{\text{A}} + \vec{\omega}\times\vec{v}_{\text{A}} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ точки А; полное, тангенциальное и нормальное ускорения лежат в одной плоскости – плоскости вращения.

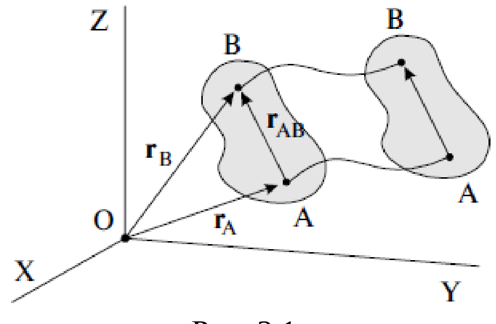



Рис. 3.1.

Последовательность этих перемещений можно изменить, т.е. сначала осуществить бесконечно малый поворот ТТ вокруг “старого” положения ЦМ, а затем параллельный сдвиг всего ТТ в “новое” положение ЦМ (пример для плоского движения на рис. 3.3). Поэтому

именно поступательное (рис. 3.1) и вращательное (рис. 3.2) движения являются основными видами движения ТТ, а все другие – *плоское движение* (движение ТТ, при котором траектории всех точек ТТ лежат в параллельных плоскостях), *сферическое движение* (движение ТТ с одной неподвижной точкой), свободное движение (движение ТТ без ограничений на его перемещения в пространстве) – сводятся к одному из них или к их комбинации.

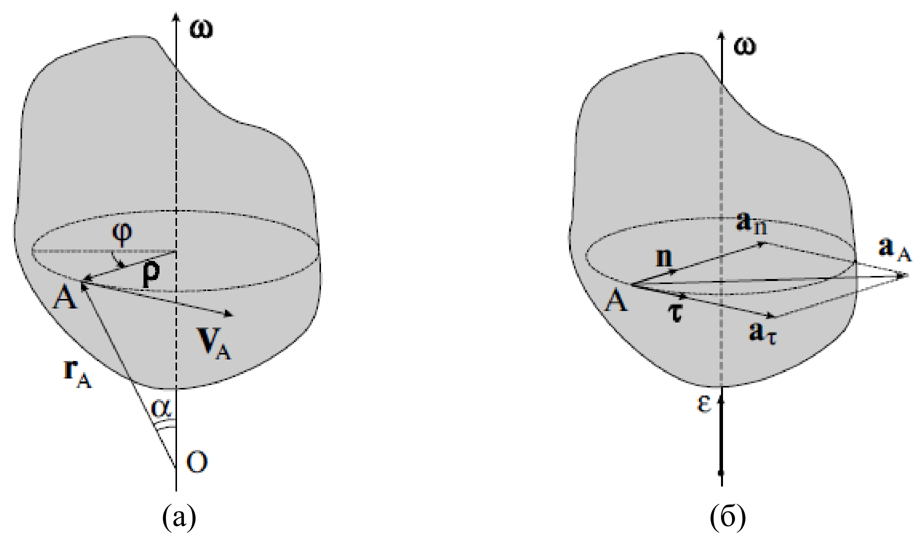



Рис. 3.2.

В соответствии с (3.3) формула Эйлера определяет скорость любой точки ТТ в данный момент времени как сумму мгновенных скоростей поступательного и вращательного движений.

Необходимо также понимать, что

1) выбор ЦМ в формулах (3.1) и (3.2) обоснован целесообразностью только в динамике ТТ; в кинематике вместо ЦМ можно выбрать любую другую точку ТТ (на рис. 3.3 показано перемещение плоскодвижущегося ТТ как суперпозиция поступательного из 1 в 1' и вращательного из 1' в 2 вокруг полюса A' (рис. 3.3 а) или B' (рис. 3.3 б) движений);
2) поступательно движущееся ТТ имеет три степени свободы (три числа, определяющих $d\vec{r}_C$) и кинематически эквивалентно движению МТ;
3) вращательно движущееся ТТ в общем случае имеет три степени свободы (три числа, определяющих $d\vec{\varphi}$ или $\vec{\omega}$), а при фиксированной в пространстве оси вращения кинематически эквивалентно движению МТ по окружности;
4) существует мгновенная ось вращения (проходит через точку, радиус-вектор которой удовлетворяет уравнению $0 = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$), относительно которой распределение скоростей точек ТТ в данный момент времени соответствует чистому вращению ТТ вокруг этой оси; мгновенная ось вращения может лежать вне ТТ.

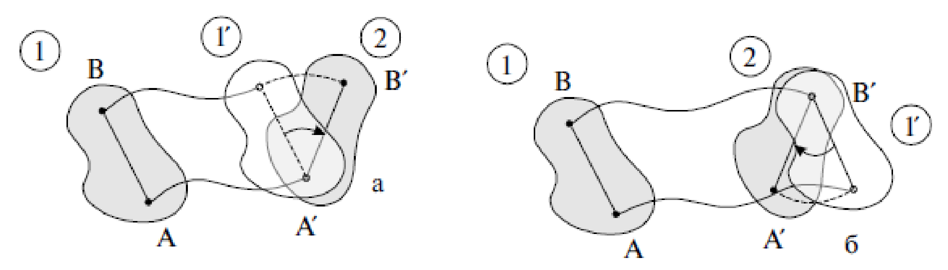



Рис. 3.3.

## 3.2. Динамика твердого тела.

Система уравнений, описывающая движение ТТ, должна содержать шесть независимых скалярных уравнений или два независимых векторных уравнения соответственно числу степеней свободы ТТ. Интуитивно ясно, что одно векторное уравнение должно описывать поступательное движение, а второе – вращательное. Поскольку ТТ является частным случаем системы МТ, то таковыми являются уравнения для изменений импульса и момента импульса ТТ:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}^{ex}; \qquad (3.4)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ex}. \qquad (3.5)$$

здесь $\vec{p} = \int \vec{v} dm$; $\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm$ – импульс и момент импульса (относительно начала СО) ТТ. Уравнения (3.4) и (3.5) описывают движение ТТ при заданных внешних силах и НУ. В правых частях этих уравнений в силах (и их моментах) следует учитывать и массовые силы – силы, действующие на каждую МТ тела (например, для сил тяжести $\vec{F}^{ex} = \int \vec{g} dm = m\vec{g}$ и ее момент $\vec{M}^{ex} = \int \vec{r} \times \vec{g} dm = \int \vec{r} dm \times \vec{g} = \vec{r}_C \times m\vec{g}$ относительно начало СО), и силы реакции – силы взаимодействия МТ поверхности ТТ с другими телами или внешней средой (например, силы трения).

В статических задачах необходимыми условиями равновесия ТТ являются $\vec{F}^{ex} = 0$, $\vec{M}^{ex} = 0$; достаточными – нулевые скорости всех МТ, составляющих ТТ, в начальный момент времени. В случае равновесия ТТ выбор точки, относительно которой вычисляются моменты сил, произволен и определяется из соображений удобства.

Для большинства динамических задач запись уравнений (3.4) и (3.5) заметно упрощается, если воспользоваться представлением (3.1) при вычислении динамических переменных – импульса, момента импульса и кинетической энергии ТТ. Однако и в этом случае математика остается достаточно сложной. Поэтому далее ограничимся рассмотрением только плоского движения ТТ.

Плоское движение ТТ определяется движением одного из его сечений в одной плоскости, причем всегда вектор $\vec{\omega}$ угловой скорости ТТ перпендикулярен этой плоскости, поэтому $\vec{\omega} \cdot \vec{r} = 0$ ($\vec{r}$ – радиус-вектор любой точки сечения ТТ в плоскости движения). В этом случае динамические переменные ТТ записываются в виде:

– импульс: $\vec{p} = m\vec{v}_C$, где $m$ – масса ТТ; $\vec{v}_C$ – скорость ЦМ ТТ;
– момент импульса относительно начала ИСО: $\vec{L} = \vec{r}_C \times \vec{p} + I_C \vec{\omega}$, где $\vec{r}_C$ – радиус-вектор ЦМ ТТ; $I_C = \int r_\perp^2 dm$ – момент инерции ТТ относительно оси, проходящей через ЦМ; $r_\perp^2$ – квадрат расстояния от элемента $dm$ ТТ до этой оси;
– кинетическая энергия $E_k = \dfrac{mv_C^2}{2} + \dfrac{I_C \omega^2}{2}$ (теорема Кенига), где $\dfrac{mv_C^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения; $\dfrac{I_C \omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения ТТ.

Тогда уравнения плоского движения ТТ

$$m\dot{\vec{v}}_C = \vec{F}^{ex}; \qquad I_C \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_C^{ex} \qquad (3.6)$$

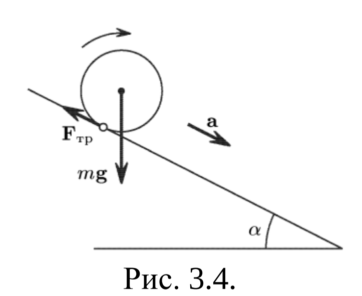


Рис. 3.4.

Здесь $\vec{M}_C^{ex}$ – момент внешних сил относительно центра масс.

В плоскости $(x, y)$ движения система (3.6) состоит из трех скалярных уравнений:

$$m\dot{v}_x = \vec{F}_x^{ex}; \quad m\dot{v}_y = \vec{F}_y^{ex}; \quad I_C\dot{\omega} = M_C^{ex}, \qquad (3.7)$$

решение которых с НУ: $t = 0$: $x = x_0; y = y_0; \omega = \omega_0$ описывает динамику плоского движения ТТ.

В качестве примера приведем решение (3.7) задачи о скатывании тела, обладающего осевой симметрией (например, цилиндра или трубы), с наклонной плоскости без скольжения (рис. 3.4): $a = \dfrac{mgr^2 \sin\alpha}{I + mr^2}$; $\dot{\omega} = \dfrac{mgr\sin\alpha}{I + mr^2}$; $F_{тр} = \dfrac{Img\sin\alpha}{I + mr^2}$, где $r$ – радиус тела; $I$ – момент инерции тела относительно его оси симметрии. Видно, что полые тела скатываются медленнее, чем сплошные той же формы, поскольку при одинаковых массах и размерах моменты инерции полых тел больше, чем сплошных (рис. 2.2). Это означает, что при скатывании полых тел большая часть их потенциальной энергии переходит в кинетическую энергию $\dfrac{I_C\omega^2}{2}$ вращательного движения и меньшая в кинетическую энергию $\dfrac{mv_C^2}{2}$ поступательного движения.

# <u>Глава 4.</u> Движение в неинерциальной системе отсчета

Неинерциальной называется СО, движущаяся ускорено относительно ИСО. В неинерциальной системе отсчета (**НСО**) законы Ньютона неприменимы. Например, МТ, покоящаяся в ИСО, в любой НСО имеет ненулевое ускорение, что не соответствует (1.15). Это ненулевое ускорение зависит только от закона движения НСО относительно ИСО. Поэтому необходимо

1) в ускорении $\vec{a}$ МТ относительно ИСО выделить ее ускорение $\vec{a}_r$ относительно НСО, т.е. установить закон преобразования ускорения $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_*$ МТ при переходе из НСО в ИСО;
2) подставить эту формулу в уравнение движения (1.15) и записать его в виде: $m\vec{a}_r = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{in}$, где $\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_*$ – сила инерции.

Тогда структура уравнения движения МТ вида “произведение массы на ускорение МТ равно действующей на нее силе” будет верной в любой СО, с тем условием, что в НСО к “обычным” силам (которые являются результатом взаимодействия тел) необходимо добавить силы инерции, которые возникают только из-за ускоренного движения НСО. Поэтому силы инерции не являются инвариантными при переходе к другой СО, результатом взаимодействия тел, не подчиняются третьему закону Ньютона и всегда являются внешними по отношению к механической системе, движение которой рассматривается. В частности, в

рассмотренном выше примере получим ненулевое ускорение $\vec{a}_r = \dfrac{\vec{F}_{in}}{m}$ МТ в НСО при $\sum_i \vec{F}_i = 0$.

## 4.1. Закон преобразования ускорения

Закон преобразования ускорения при переходе из НСО, заданным образом движущейся относительно ИСО (теорема Кориолиса), в общем случае имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_{cor} + \vec{a}_{por}, \tag{4.1}$$

где $\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_r$ – ускорение Кориолиса; $\vec{a}_{por} = \dot{\vec{v}}_0 + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'$ – переносное ускорение; $\dot{\vec{v}}_0$ – ускорение начала НСО; $\vec{\omega}$ – угловая скорость НСО; $\vec{r}\,', \vec{v}_r$ – радиус-вектор и скорость МТ в НСО.

## 4.2. Уравнение движения МТ относительно НСО. Силы инерции.

Уравнение движения МТ в НСО и силы инерции с учетом (4.1) записываются в виде:

$$m\vec{a}_r = \sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{por}, \tag{4.2}$$

$$\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v}_r \times \vec{\omega}, \tag{4.3}$$

$$\vec{F}_{por} = -m\dot{\vec{v}}_0 + m\omega^2\vec{r}\,'_\perp - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'. \tag{4.4}$$

Здесь $\vec{F}_{cor}$ – кориолисова сила инерции возникает, если НСО вращается и МТ движется относительно НСО при условии $\vec{v}_r \times \vec{\omega} \neq 0$; $\vec{F}_{por}$ – переносная сила инерции, состоящая из $-m\dot{\vec{v}}_0$ – переносной поступательной силы инерции, $m\omega^2\vec{r}\,'_\perp$ – переносной центробежной силы инерции, $-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'$ – переносной силы инерции, обусловленной неравномерностью вращения НСО.

# Глава 5. Движение сплошных сред

Механика сплошных сред – это феноменологическое описание движения газообразных, жидких и твердых деформируемых тел как сплошной среды (континуума), расстояние между точками которой могут изменяться. Под точкой СС следует понимать физически бесконечно малый деформируемый элемент объема СС. Математический аппарат механики СС составляют дифференциальные уравнения в частных производных, векторный и тензорный анализ, что затрудняет изучение движения СС в рамках общего курса физики. Поэтому далее ограничимся рассмотрением лишь элементарных основ механики СС.

## 5.1. Упругие деформации. Закон Гука.

Деформацией называется изменение формы или объема тел под действием приложенных сил. Упругими (или обратимыми) называются деформации, которые исчезают после снятия вызывающих их сил. Это означает, что такие деформации происходят без диссипации энергии и перестройки структуры вещества, что является приемлемым приближением только в случае малых деформаций, подчиняющихся закону Гука (1.21) и, в

силу линейности, принципу суперпозиции деформаций. Опыт показывает, что в (1.21) 1) $\Delta l \sim l$ (на рис. 5.1 а каждый из одинаковых стержней растягивается силой $F$, удлиняется на $\Delta l$, а вместе они удлиняются на $2\Delta l$), 2) $F \sim S$, где $S$ – площадь поперечного сечения стержня (на рис. 5.1 б под действием силы $2F$, каждый из одинаковых стержней растягивается силой $F$ и удлиняется на $\Delta l$);

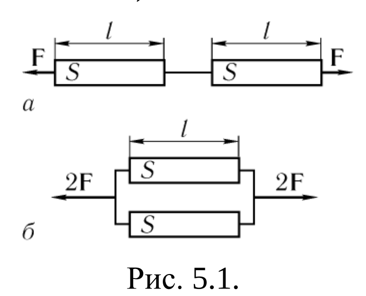


Рис. 5.1.

поэтому удобно ввести относительное удлинение (деформацию) $\varepsilon = \Delta l / l$ и механическое напряжение $\sigma = F / S$, которые при деформации растяжения (сжатия) однородного упругого стержня с постоянным вдоль стержня сечением связаны законом Гука в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma . \tag{5.1}$$

Величина $E$ определяется только упругими свойствами материала, из которого сделан стержень, и называется модулем Юнга материала.

В случае растяжения (сжатия) стержня уменьшаются (увеличиваются) его поперечные размеры. Отношение относительного поперечного сжатия стержня к его относительному удлинению зависит только от материала стержня и называется коэффициентом Пуассона:

$$-\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} = \mu . \tag{5.2}$$

Здесь $\varepsilon_{\perp} = \dfrac{\Delta d}{d}$ – относительная деформация поперечного размера $d$ стержня; $\mu$ – коэффициент Пуассона; знак “–” учитывает, что $\varepsilon_{\perp} < 0$ при $\varepsilon > 0$.

При деформации над телом совершается работа. Эта работа запасается в виде упругой потенциальной энергии полностью, если совершаемая работа при деформации не расходуется на увеличение кинетической энергии. Это возможно только если внешние силы всегда уравновешиваются силами внутренних напряжений. Такая деформация называется квазистатической, а соответствующая ей упругая энергия и объемная плотность упругой энергии равны:

$$U = A = \int_0^{\Delta l} F dl = \frac{1}{2} V \frac{\sigma^2}{E}; \quad u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E} . \tag{5.3}$$

Модуль $E$ Юнга и коэффициент $\mu$ Пуассона полностью определяют упругие свойства однородного изотропного материала, т.е. линейный отклик такого материала на любое внешнее воздействие выражается через эти постоянные. Например, в случае всестороннего сжатия (тело в воде) деформация объема и плотность упругой энергии равны:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{3p}{E}(1-2\mu) = -\frac{p}{K}; \quad u = \frac{1}{2}\frac{p^2}{K} , \tag{5.4}$$

где $p$ – давление (отрицательное напряжение); $K = \dfrac{E}{3(1-2\mu)}$ – модуль всестороннего сжатия с универсальным ограничением $0 < \mu < 1/2$ на значение коэффициента Пуассона. Аналогичные (5.3 – 5.4) по структуре соотношения могут быть получены и для всех других видов упругих деформаций: сдвига, изгиба, кручения.

## 5.2. Гидростатика

Гидростатика изучает равновесие газообразных и жидких тел (далее жидких тел), которые в механике рассматриваются как сплошные среды, обладающие свойством текучести, проявляющейся в способности этих тел принимать форму сосуда, в который они помещены. Опыт показывает, что изменение формы жидкости без изменения ее объема может происходить под действием сколь угодно малых сил (например, медленное и малое наклонение сосуда с жидкостью приводит к перемещению верхних слоев жидкости относительно нижних, в результате чего поверхность жидкости становится снова горизонтальной – перпендикулярной силе тяжести). Свойство текучести объясняется отсутствием сил трения покоя, действующих вдоль поверхности соприкасающихся слоев, так что одни слои (части) могут скользить по другим слоям под действием ничтожно малых сил. Поэтому в неподвижной жидкости части жидкости действуют друг на друга, на стенки сосуда или помещенные в них ТТ с силами, направленными перпендикулярно к поверхности их соприкосновения (при наличии касательной составляющей силы взаимодействия части жидкости пришли бы в движение). Величиной, характеризующей такое взаимодействие, является давление $p = F/S$, которое определяется как отношение модуля силы $F$, действующей на выделенную площадку по нормали к ней, к площади $S$ этой площадки. Давление в жидкости не зависит от ориентации выделенной площадки.

Закон Паскаля: давление, оказываемое на жидкость в каком-либо одном месте на ее границе, передается без изменения во все точки жидкости при условии отсутствия массовых сил (например, силы тяжести). Так, в гидравлическом прессе $F_1/S_1 = F_2/S_2$ (рис. 5.2).

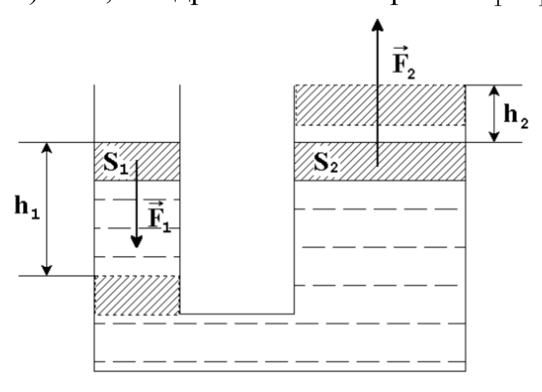



Рис. 5.2.

В однородном поле силы тяжести давление в жидкости увеличивается с глубиной погружения благодаря весу самой жидкости. Для несжимаемой жидкости (жидкости неизменного объема и, следовательно, плотности):

$$p = p_0 + \rho g h, \tag{5.5}$$

где $p_0$ – давление на поверхность воды со стороны атмосферы; $\rho g h$ – гидростатическое давление на глубине $h$. Роль давлений $p_0$ и $\rho g h$ легко прослеживается на схемах опытов, изображенных на рис. 5.3.

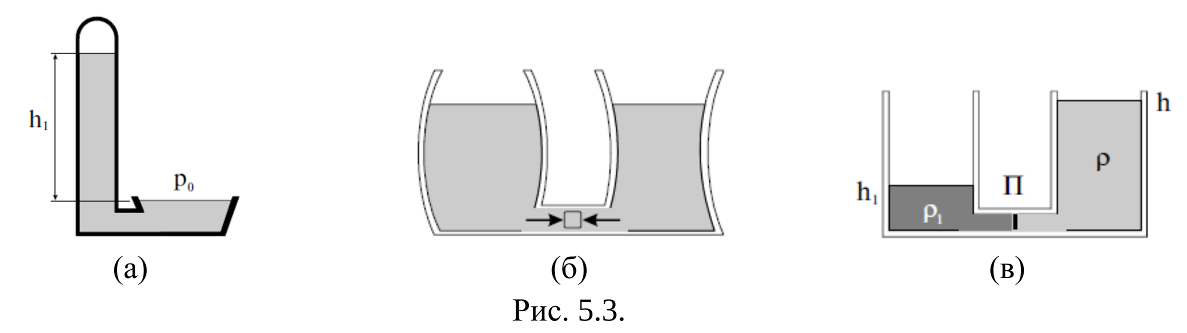


Рис. 5.3.

Закон Архимеда: выталкивающая сила, действующая на тело, погруженное в жидкость, равна по модулю весу вытесненной жидкости и противоположна ему по направлению (рис. 5.4 а):

$$F_A = \rho V g\,, \tag{5.6}$$

где $\rho$ – плотность жидкости; $V$ – объем вытесненной жидкости. Здесь следует помнить, что если часть поверхности тела плотно прилегает к стенке или дну сосуда, то закон Архимеда неприменим.

Рис. 5.4 а показывает, что сила Архимеда возникает из-за неоднородности распределения давления по глубине (5.5) и приложена к ЦМ вытесненной жидкости. Если ЦМ погруженного тела не совпадает с ЦМ вытесненной жидкости, то для устойчивости плавания погруженного в жидкость тела необходимо, чтобы его ЦМ находился ниже точки приложения архимедовой силы. Тогда момент возникающей при боковом наклоне тела пары сил будет возвращать его в вертикальное положение (рис. 5.4 б).

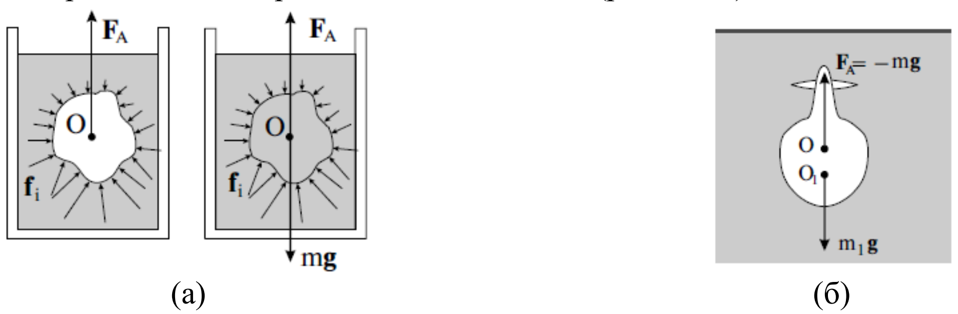


Рис. 5.4.

ЦМ тел, плавающих на поверхности жидкости, расположен всегда выше ЦМ, вытесненной жидкости. Поэтому устойчиво плавает только “горизонтальный” карандаш (рис. 5.5 а), а устойчивость плавания корабля, например, достигается выбором формы корабля и его загрузки, при которых линия действия выталкивающей силы всегда проходит через фиксированную точку – метацентр, расположенный выше ЦМ корабля (рис. 5.5 б).



Рис. 5.5.

## 5.3. Движение идеальной жидкости.

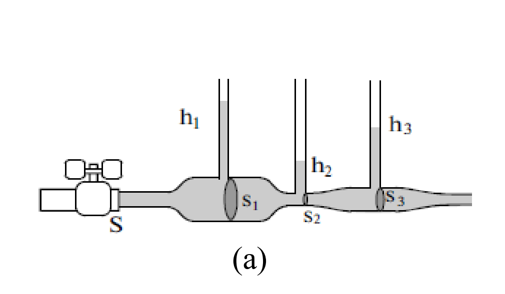
При отсутствии условий, обеспечивающих равновесие, внешнее воздействие приводит жидкость в движение. Движение жидкости называется течением, а совокупность частиц движущейся жидкости – потоком. Течение изображается с помощью линий тока жидкости – линий, касательные в каждой точке которых совпадают по направлению с вектором скорости частиц жидкости в данный момент. Если картина линий тока жидкости не изменяется со временем, то течение жидкости называется стационарным (установившимся). Для установившегося течения траектории движения жидких частиц совпадают с линиями тока жидкости. Если провести линии тока жидкости через все точки односвязного замкнутого контура, то образуется трубка тока жидкости. В стационарном случае через любое поперечное сечение трубки тока в единицу времени протекает одна и та же масса жидкости (массовый расход $G_m$), т.к. через боковую поверхность трубки жидкость не протекает. Уравнение, выражающее этот закон сохранения массы называется уравнением непрерывности:

$$G_m = \rho v S = \text{const} \quad \text{или} \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \tag{5.7}$$

здесь $\rho$, $v$ – плотность и средняя скорость жидкости в произвольном поперечном сечении площадью $S$ трубки тока.

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, и неизменным будет оставаться объемный расход: $G_V = vS = \text{const}$ – условие несжимаемости.

Поэтому если поперечное сечение трубки переменно вдоль ее оси, то изменяться будет и скорость жидкости. Изменение скорости осуществляет сила, возникающая из-за осевой неоднородности давления. Это подтверждает простой опыт, схема которого приведена на рис. 5.6 а. Поэтому говорят, что непрерывность течения жидкости обеспечивает градиент давления.




(а) (б)

Рис. 5.6.

Второй закон Ньютона для жидкой частицы единичного объема, движущейся вдоль оси $x$, без учета сил вязкого трения (такое приближение называется идеальной жидкостью) и при отсутствии внешних сил

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{5.8}$$

В общем случае $v_x = v_x(t, x)$, поэтому (5.8) примет вид уравнения Эйлера:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{5.9}$$

Для установившегося течения из (5.9.) следует равенство, связывающее давление и скорость в двух произвольных сечениях трубки тока, которое является частным случаем уравнения Бернулли:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \qquad (5.10)$$

Система уравнений (5.7) и (5.10) определяет величину массового расхода жидкости

$$G_m = \sqrt{\frac{2\rho(p_1 - p_2)}{S_2^{-2} - S_1^{-2}}}, \qquad (5.11)$$

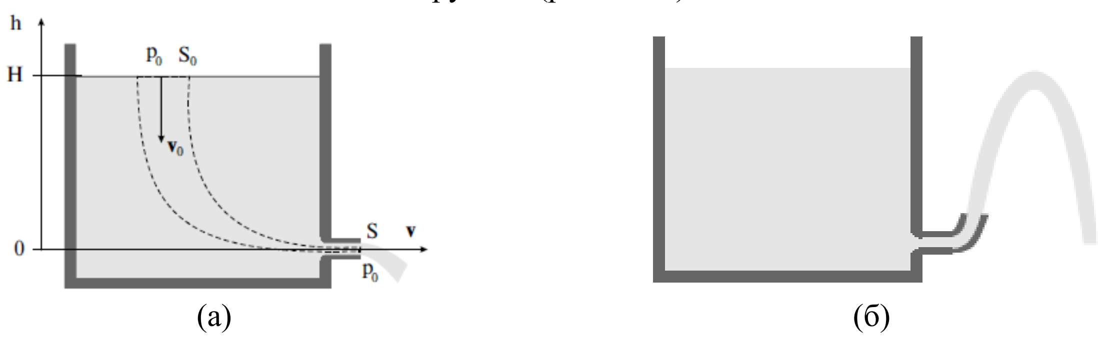
где $p_1 = \rho g h_1$, $p_2 = \rho g h_2$ вычисляются по показаниям манометрических трубок (рис. 5.6 а). Этот способ применяется в водомерах для измерения расхода воды на практике.

При движении жидкости в однородном поле тяжести (рис. 5.6 б) уравнение Бернулли (5.10) имеет вид:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2. \qquad (5.12)$$

здесь $p$ – статическое давление, измеряемое манометром, трубка которого ориентирована перпендикулярно линии тока и движущегося вместе с жидкостью, имеющего смысл работы сил давления, совершаемых над единичным объемом жидкости; $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамическое давление, являющееся кинетической энергией этого единичного объема, $\rho g h$ – его потенциальная энергия в поле силы тяжести.

Уравнение Бернулли широко применяется при решении различных гидродинамических задач. Например, вытекание жидкости через отверстие в сосуде (рис. 5.7 а) происходит со скоростью, определяемой следствием (5.12) – формулой Торричелли: $v = \sqrt{2gH}$, где $H$ – высота столба жидкости над сливной трубкой (рис. 5.7 б).



(а) (б)

Рис. 5.7.

Скорость струи можно заметно увеличить за счет высокого избыточного давления $\Delta p = p_1 - p_2$ в (5.12). Тогда высокоскоростная струя с диаметром иглы становится водяным ножом в технологии гидрорезания различных материалов.

В общем случае движение идеальной жидкости описывается уравнениями 1) движения жидкой частицы единичного объема – уравнением Эйлера и 2) несжимаемости:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \operatorname{grad} p; \qquad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \qquad (5.13)$$

здесь $\vec{f} = d\vec{F}/dV$ – объемная плотность массовой силы (сила, действующая на единичный объем); $\operatorname{grad} p$ – градиент давления; $\operatorname{div} \vec{v}$ – дивергенция вектора скорости.

В ДСК градиент и дивергенция выражаются в виде:

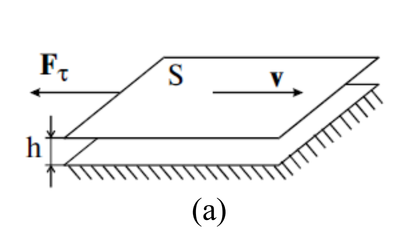
$$\operatorname{grad} p = \vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z}; \qquad \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

## 5.4. Движение вязкой жидкости.

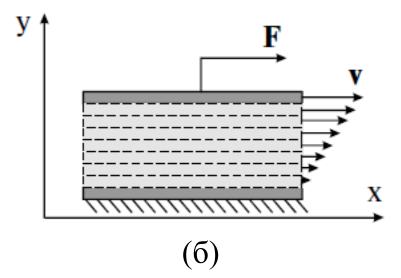
Вязкой называется жидкость, анализ движения которой требует учета сил вязкого трения. Опыт показывает, например, что при скольжении друг относительно друга двух параллельных плоскостей, пространство между которыми заполнено жидкостью, силы вязкого трения препятствуют этому скольжению (рис. 5.8 а) по закону, эмпирически установленному Ньютоном:

$$F_\tau = \mu S \frac{v}{h}, \tag{5.14}$$

где $\mu$ – коэффициент вязкости жидкости.



(а)



(б)

Рис. 5.8.

Объяснение необходимости действия силы $F = F_\tau$ при неизменной относительной скорости пластин основано на представлении жидкости между пластинами в виде плоских параллельных слоев, движущихся равномерно (рис. 5.8 б). Каждый слой увлекает за собой соседний нижний слой с силой $F_\tau$, который, в свою очередь, тормозит движение верхнего слоя с той же силой. В результате на каждый слой действуют сверху и снизу две равные, но противоположно направленные силы. Скорость слоев возрастает от нижнего (прилипшего к нижней пластине) слоя к верхнему (прилипшему к верхней пластине) линейно, а усилие $F = F_\tau$, приложенное к верхней пластине, передается на нижнюю.

Учет силы вязкого трения в уравнении Эйлера (5.13) дает уравнение движения вязкой жидкости – уравнение Навье – Стокса:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \operatorname{grad} p + \mu \Delta \vec{v}, \tag{5.15}$$

где $\Delta \vec{v}$ – лапласиан скорости, который в ДСК имеет вид:

$$\Delta \vec{v} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}.$$

Из-за математической сложности аналитические решения уравнения Навье – Стокса получены только в некоторых частных случаях, одним из которых является задача Пуазейля об установившемся равномерном прямолинейном течении вязкой жидкости в цилиндрической или плоской трубе. Опыт показывает наличие постоянного вдоль оси трубки градиента давления при таком течении (рис. 5.9 а), а расчет дает параболическое распределение скорости при условии, что у стенок трубки эта скорость равна нулю (рис. 5.9 б):

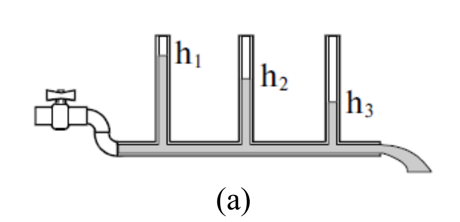
$$v(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \left(R^2 - r^2\right). \tag{5.16}$$

здесь $-\frac{dp}{dx} > 0$ в соответствии с рис. 5.9 а и не зависит от $x$.

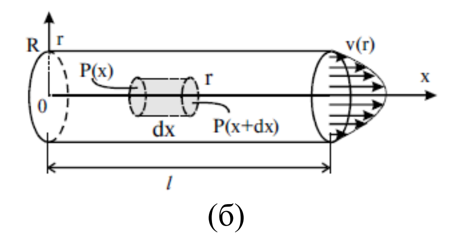
Объемный расход жидкости пропорционален перепаду давления $p_1 - p_2$ на концах трубки длиной $l$ и четвертой степени радиуса $R$ трубки:

$$G_V = \frac{\pi R^4}{8\mu}\frac{p_1 - p_2}{l} \tag{5.17}$$

.




(а)




(б)

Рис. 5.9.

# <u>Глава 6.</u> Колебательное движение

*Колебательным* называется движение механической системы вблизи положения устойчивого равновесия. При отклонении системы от такого положения возникает сила, стремящаяся вернуть систему в положение равновесия. Если влиянием других сил можно пренебречь, то такая идеальная механическая система (гармонический осциллятор) будет совершать неограниченные во времени колебания, которые называются *свободными* или *собственными*. Последний термин отражает тот факт, что частота колебаний зависит только от физических свойств самой механической системы. Собственные колебания механической системы возбуждаются возмущением ее состояния путем отклонения или/и сообщения скорости в некоторый момент времени, которое при математическом описании задается НУ.

Колебания реальной механической системы будут *затухающими* за счет действия внешних диссипативных сил. Поэтому для поддержания колебаний системы необходимо обеспечить подвод энергии к ней извне за счет работы внешней силы. Такие колебания называются *вынужденными*.

## 6.1. Кинематика колебательного движения.

Кинематическая модель гармонического колебательного движения – движение проекции на горизонтальную или вертикальную оси конца радиус-вектора $\vec{s}_0$, вращающегося равномерно с постоянной угловой скоростью $\omega_0$ (круговой частотой) против часовой стрелки:

$$s(t) = s_0 \sin\varphi(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{6.1}$$

где $s_0$ – амплитуда колебания ($s(t) \le s_0$); $\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний; $\varphi_0$ – начальная фаза – угол между $\vec{s}_0$ и положительным направлением горизонтальной оси в начальный момент времени (рис. 6.1).

График гармонического колебания – синусоида, форма и расположение которой определяются $s_0$, $\omega_0$, $\varphi_0$ (рис. 6.1).

Период колебаний – минимальное время, через которое механическое состояние осциллятора в точности повторяется

$$s(t) = s(t+T) \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi/\omega_0. \tag{6.2}$$

Циклическая частота – число колебаний за единицу времени

$$\nu = 1/T\ . \tag{6.3}$$

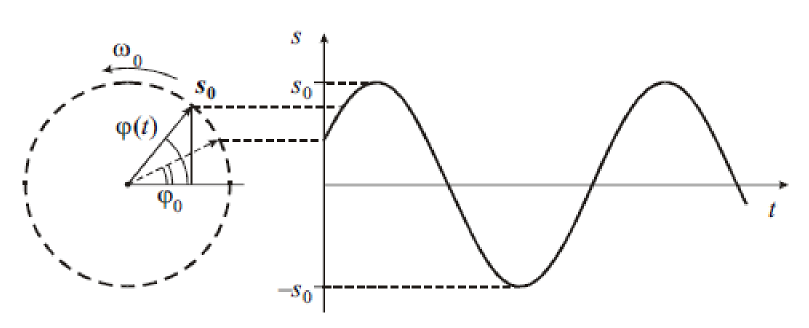



Рис. 6.1.

Векторная диаграмма – это графическое изображение гармонического колебания в виде радиус-вектора $\vec{s}_0$, составляющего угол $\varphi_0$ с некоторым фиксированным направлением, при котором вращение $\vec{s}_0$ против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью $\omega_0$ только подразумевается.

Сложение гармонических колебаний $s_1(t)$ и $s_2(t)$ с одинаковыми круговыми частотами (при этом угол между $\vec{s}_{01}$ и $\vec{s}_{02}$ с течением времени не изменяется, рис. 6.2):

$$\vec{s}_{01} + \vec{s}_{02} = \vec{s} \quad \Rightarrow \quad s(t) = s_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \tag{6.4}$$

где

$$s_0 = \sqrt{(s_{01}\cos\varphi_1 + s_{02}\cos\varphi_2)^2 + (s_{01}\sin\varphi_1 + s_{02}\sin\varphi_2)^2}\ ,$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{s_{01}\sin\varphi_1 + s_{02}\sin\varphi_2}{s_{01}\cos\varphi_1 + s_{02}\cos\varphi_2}\,.$$

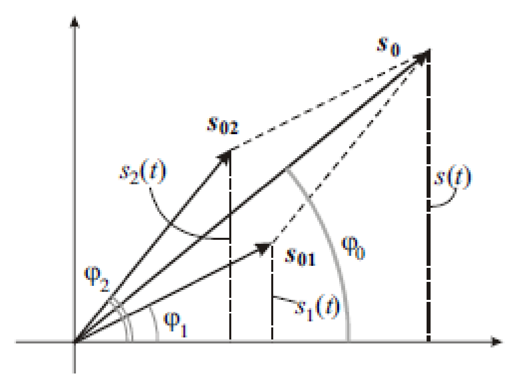



Рис. 6.2.

## 6.2. Собственные гармонические колебания.

Примеры гармонических осцилляторов (рис. 6.3) и их уравнений движения:

- пружинный маятник (горизонтальный рис. 6.3 а или вертикальный) – линейный осциллятор:

$$\ddot{s} = -\frac{k}{m}s\,, \tag{6.5}$$

где $s$ – отклонение системы от положения равновесия $s = 0$; собственная частота $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$;

- математический маятник (рис. 6.3 б) – нелинейный осциллятор:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha\,; \qquad (6.6)$$

в линейном приближении для малых углов отклонения $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\alpha$; собственная частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$;

- физический маятник (рис. 6.3 в) – нелинейный осциллятор:

$$\ddot{\alpha} = -\frac{mga}{I_{O'}}\sin\alpha\,; \qquad (6.7)$$

в линейном приближении $\ddot{\alpha} = -\frac{mga}{I_{O'}}\alpha$; собственная частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I_{O'}}} = \sqrt{\frac{mga}{I_O + ma^2}}$.

здесь $\alpha$ – отклонение маятника от положения равновесия $\alpha = 0$.

Поэтому уравнение гармонического осциллятора:

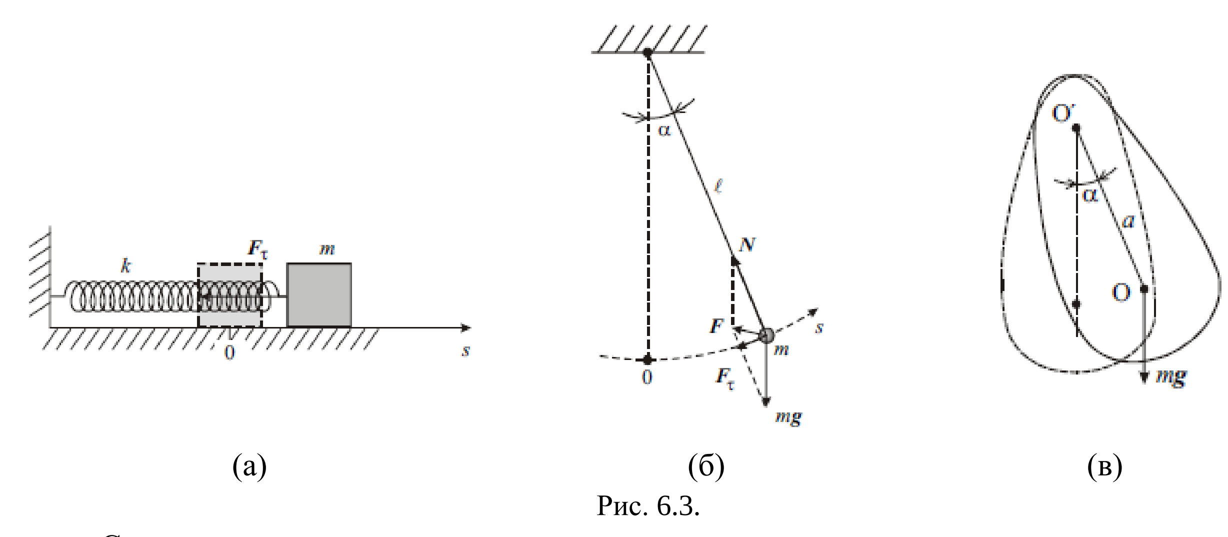
$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x\,. \qquad (6.8)$$

Общее решение этого уравнения

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\,. \qquad (6.9)$$

Амплитуда $A$ и начальная фаза $\varphi_0$ колебаний определяются НУ – заданными смещением $x(0)$ и скоростью $\dot{x}(0) = v(0)$:

$$A = \sqrt{x^2(0) + \left(\frac{v(0)}{\omega_0}\right)^2}\,, \qquad \mathrm{tg}\varphi_0 = -\frac{\omega_0 x(0)}{v(0)}\,. \qquad (6.10)$$




(а) (б) (в)

Рис. 6.3.

Скорость осциллятора

$$v(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (6.11)$$

имеет амплитуду $\omega_0 A$ и по фазе опережает смещение на $\pi/2$.

***Энергии гармонического осциллятора:***

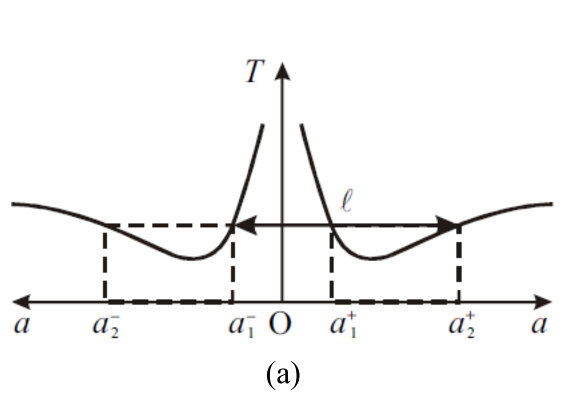
| | пружинный | математический | физический |
|---|---|---|---|
| кинетическая | кинетическая энергия тела, прикрепленного к пружине | кинетическая энергия МТ, подвешенной на | кинетическая энергия вращательного |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | нити | движения тела |
| | $\frac{m(\omega_0 A)^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)=$ $=\frac{kA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)$ | $\frac{mglA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)$ | $\frac{mgaA^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)$ |
| потенциальная | упругая энергия пружины | потенциальная энергия МТ в поле тяжести Земли | потенциальная энергия тела в поле тяжести Земли |
| | $\frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)$ | $\frac{mglA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)$ | $\frac{mgaA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)$ |
| механическая | $\frac{kA^2}{2}$ | $\frac{mglA^2}{2}$ | $\frac{mgaA^2}{2}$ |

Физический маятник характеризуется приведенной длиной, которая равна длине математического маятника с тем же периодом колебаний:

$$l=\frac{I_{O'}}{ma}=\frac{I_O+ma^2}{ma}, \tag{6.12}$$

Видно, что приведенная длина (а, следовательно, и период – см. рис. 6.4 а, где показано изменение периода колебаний при удалении оси $O'$ вращения от ЦМ $O$ в обе стороны) физического маятника немонотонно зависит от расстояния $a$ между осью $O'$ подвеса и ЦМ маятника (рис. 6.3 в).




(а) (б)

Рис. 6.4.

Сумма расстояний $a_1^+$ и $a_2^+$ равна приведенной длине физического маятника. Поэтому и $a_1^-+a_1^+=l$, т.е. для любой оси $O^+$ вращения можно определить сопряженную ось $O^-$ вращения с одинаковыми периодами колебаний и расстоянием между осями равным приведенной длине (рис. 6.4 б). Это обстоятельство используется в лабораторном практикуме для косвенного измерения ускорения свободного падения по экспериментально определяемой приведенной длине оборотного маятника.

## 6.3. Собственные затухающие колебания.

Уравнение затухающих колебаний – уравнение движения осциллятора с учетом силы (1.22) вязкого трения

$$\ddot{x}=-\omega_0^2\,x-2\gamma\,\dot{x}, \tag{6.13}$$

где $\gamma$ – коэффициент (декремент) затухания.

Закон собственных затухающих колебаний реализуется в докритическом режиме движения при условии $\gamma < \omega_0$:

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi_0) = A(t)\cos(\omega_1 t + \varphi_0)\,, \qquad (6.14)$$

График собственных затухающих колебаний приведен на рис. 6.5.

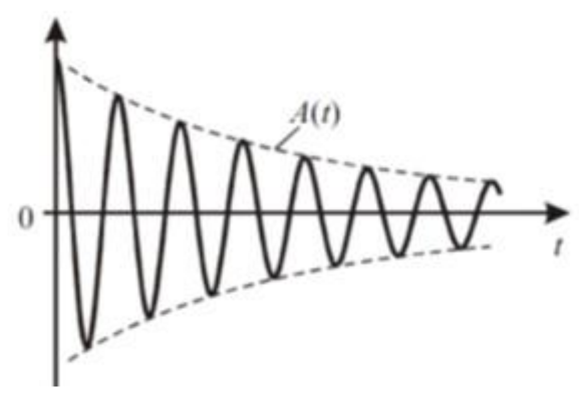



Рис. 6.5.

Условный период затухающих колебаний

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}\,. \qquad (6.15)$$

Время $\tau$ затухания (релаксации) – время, в течение которого отклонение осциллятора от положения равновесия уменьшается в $e$ раз

$$\tau = \frac{1}{\gamma}\,. \qquad (6.16)$$

Число $N$ колебаний, в течение которых амплитуда уменьшается в $e$ раз

$$N = \frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{\gamma T_1}\,. \qquad (6.17)$$

Обратная $N$ величина $\theta$ называется логарифмическим декрементом затухания

$$\theta = \frac{1}{N} = \gamma T_1 = \ln\frac{x(t)}{x(t+T_1)}\,, \qquad (6.18)$$

т.е. для оценки логарифмического декремента следует подсчитать число колебаний, совершенных за время затухания – до уменьшения амплитуды колебаний примерно в 3 раза.

Закон убывания энергии осциллятора

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}\,, \qquad (6.19)$$

где $E_0$ – энергия в начальный момент времени, которая монотонно убывает с характерным временем затухания $\tau/2$.

Добротность $Q$ – характеристика “качества” осциллятора, пропорциональная отношению энергии $E(t)$ осциллятора к энергии $\Delta E_T$, теряемой за условный период колебания:

$$Q = 2\pi\frac{E(t)}{\Delta E_T} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\theta}} \approx \frac{\pi}{\theta}\,. \qquad (6.20)$$

Возможные неколебательные решения уравнения движения (6.13) называются критическим режимом движения при $\gamma = \omega_0$ и закритическим (или апериодическим) при $\gamma > \omega_0$.

В любом режиме движения, т.е. независимо от соотношения коэффициента затухания $\gamma$ и частоты собственных незатухающих колебаний $\omega_0$, отклонение $x$ осциллятора от положения равновесия стремится к нулю при $t \to \infty$.

## 6.4. Вынужденные колебания. Резонанс

Уравнение вынужденных колебаний под действием гармонической вынуждающей силы $F_0 \cos \omega t$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \dot{x} + f_0 \cos \omega t, \qquad (6.21)$$

где $f_0 = F_0 / m$ и $\omega$ – амплитуда и частота вынуждающей силы.

В установившемся режиме (после затухания собственных колебаний) закон вынужденных колебаний при $\gamma < \omega_0$ имеет вид:

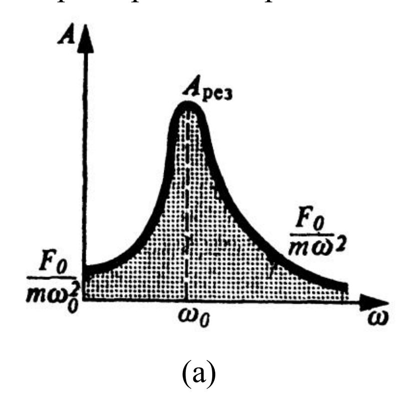
$$x = A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)], \qquad (6.22)$$

где амплитуда и начальная фаза определяются формулами:

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \qquad (6.23)$$

$$\mathrm{tg}\varphi(\omega) = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \qquad (6.24)$$

Графики зависимостей (6.23) – амплитудно-частотная характеристика и (6.24) – фазово-частотная характеристика приведены на рис. 6.6.




(а) (б)

Рис. 6.6.

Анализ (6.21 –6.24) устанавливает, что в случае

– медленных колебаний $\omega << \omega_0$:

$$x \approx \frac{f_0}{\omega_0^2}\cos \omega t; \qquad (6.25)$$

в каждый момент времени отклонение $x$ осциллятора от положения равновесия определяется мгновенным значением внешней силы из-за малости скорости и ускорения осциллятора (в уравнении движения членами с $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ можно пренебречь, поэтому этот режим еще называется квазистатическим);

– быстрых колебаний $\omega >> \omega_0$:

$$x \approx \frac{f_0}{\omega^2}\cos(\omega t - \pi); \qquad (6.26)$$

силы упругости и трения практически не играют роли из-за малости периода вынужденных колебаний (осциллятор не успевает набирать скорость и заметно смещаться от положения равновесия, поэтому в уравнении движения членами с $\dot{x}$ и $x$ можно пренебречь);

– резонансных колебаний $\omega \approx \omega_0$:

$$x \approx \frac{f_0}{2\gamma\,\omega_0}\cos\left(\omega_0\, t - \frac{\pi}{2}\right); \tag{6.27}$$

ускорение обеспечивается силой упругости, т.к. колебания происходят на собственной частоте, а внешняя сила и сила трения взаимно компенсируются.

В закон (6.27) резонансных колебаний удобно ввести добротность (6.20) осциллятора

$$x \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} Q\cos\left(\omega_0\, t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{6.28}$$

Тогда явно видно, что амплитуда резонансных колебаний может во много раз превышать амплитуду медленных колебаний при $Q >> 1$. Поэтому такой режим и называется резонансным, а явление раскачки колебаний до максимальной амплитуды – резонансом. В этом режиме скорость $\dot{x}$ изменяется в фазе с внешней силой, работа которой за период колебаний

$$A = \frac{f_0^2 T}{4\gamma} \tag{6.29}$$

компенсирует потери энергии из-за силы вязкого трения.

Ширина резонансной кривой определяется на уровне $A_{рез}^2/2$ относительно квадрата амплитуды $A^2(\omega)$ и соответствует области частот внешней силы, для которых осциллятор эффективно откликается на гармоническое воздействие

$$\Delta\omega = 2\gamma = \frac{\omega_0}{Q}, \tag{6.30}$$

Чем больше добротность, тем уже резонансная кривая и тем интенсивнее происходит раскачка колебаний в резонансе.

# Глава 7. Волновое движение

В Механике волновое движение представляет собой процесс распространения возмущения состояния СС в пространстве. Возмущение состояния – это изменение параметров состояния – физических величин, характеризующих состояние СС. Если возмущение состояния СС в одной точке пространства вызывает изменение параметров ее состояния в соседних точках пространства, то это возмущение способно перемещаться в пространстве, удаляясь от места возникновения с некоторой скоростью, которая называется скоростью волны.

Возмущение состояния СС зависит от времени $t$ и радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения, т.е. в каждой точке пространства возмущение переменно во времени, а в данный момент времени возмущения различны в разных точках пространства. Поэтому математическое описание волнового движения определяет возмущение состояния СС как векторное или скалярное (в зависимости от характера параметра состояния) волновое поле (функцию), зависящее от времени $t$ и радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения. Это поле удовлетворяет уравнению движения волны – волновому уравнению, связывающему

возмущения СС в соседних точках пространства через пространственные и временные производные возмущений. Волновое уравнение является дифференциальным уравнением в частных производных, что усложняет изучение волнового движения.

## 7.1. Упругие волны

Упругой волной называется процесс распространения упругих деформаций в среде, которые описываются векторной функцией $\vec{\xi}(t,\vec{r})$, имеющей смысл смещения частиц СС от равновесного положения в точке наблюдения $\vec{r}$ в момент времени $t$. Если вектор $\vec{\xi}(t,\vec{r})$ параллелен направлению распространения волны, то волна называется продольной, если перпендикулярен – поперечной. Распространение упругих волн обеспечивается упругостью СС, проявляющейся как ее сопротивление деформациям объема и формы. Поскольку упругостью формы обладают только твердые тела, то только в них могут распространяться поперечные волны – распространяющиеся в теле деформации сдвига. Упругость объема, присущая любому телу (газообразному, жидкому, твердому), способна обеспечить распространение только продольных волн.

Наглядной является дискретная модель продольной волны в линейной цепочке осцилляторов (рис. 7.1). Такая система называется системой с сосредоточенными параметрами, поскольку инертные свойства сосредоточены у шариков, а упругие – у пружинок.

$k$ $m$ $k$ $m$ $k$ $m$

Рис. 7.1.

Если привести первый шарик в такой цепочке в колебательное движение $\xi_1(t) = A\cos\omega t$ с частотой $\omega$ и амплитудой $A$, то из-за упругих связей (пружинок) между шариками колебательное движение будет распространяться по цепочке шариков – побежит волна. Ясно, что распространение волны характеризуется переносом импульса и энергии: кинетической, которая локализуется на шариках, и потенциальной – на пружинках. Переноса массы при этом не происходит, поскольку каждый шарик совершает колебания около своего положения равновесия и в среднем остается на месте. В силу однородности цепочки (одинаковости свойств цепочки вдоль цепочки: одинаковые шарики и одинаковые пружинки) при отсутствии трения закон движения любого другого шарика с номером $n$ будет тоже гармоническим: $\xi_n(t) = A\cos\omega(t - t_n)$, но с отставанием $t_n$ по времени (или по фазе $\varphi_n = \omega t_n$ колебаний). Это запаздывание происходит из-за конечности скорости $v$ распространения волны вдоль цепочки, зависящей только от свойств системы: от массы шариков, жесткости пружинок и расстояния между равновесными положениями шариков. Поэтому $t_n = x_n / v$, где $x_n$ – разность координат равновесных положений $n$-го и 1-го шариков вдоль цепочки. Тогда $\xi_n(t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x_n}{v}\right)$, где скорость $v$ волны определяется подстановкой $\xi_n(t)$ в уравнение движения $n$-го шарика в цепочке, движущегося под действием сил сжатия или растяжения соединенных с ним пружинок: $m\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = -k(\xi_n - \xi_{n+1}) - k(\xi_n - \xi_{n-1})$.

Для СС формула для $\xi_n(t)$ записывается в виде поля:

$$\xi(t,x) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\cos(\omega t - \kappa x), \qquad (7.1)$$

которое называется монохроматической (каждый шарик колеблется с одинаковой частотой $\omega$), плоской (поле зависит только от одной пространственной координаты $x$) волной. Эта волна периодична во времени и пространстве. Временной период колебаний в данной точке пространства (при фиксированной координате $x$): $T = 2\pi/\omega$. Пространственный период колебаний в данный момент времени (при фиксированном значении $t$): $\lambda = 2\pi v/\omega = vT$ называется длиной волны – кратчайшее расстояние между точками, совершающими синхронные колебания, фазы которых отличаются на $2\pi$. Величина $\kappa = 2\pi/\lambda$ называется волновым числом.

Закон (7.1) распространения гармонической плоской волны выполняется в абсолютно упругих средах, распространение волн в которых происходит без диссипации энергии и волны распространяются без затухания. С учетом диссипации энергии из-за трения амплитуда уменьшается и закон (7.1) для затухающей волны записывается в виде:

$$\xi(t,x) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t - \kappa x), \qquad (7.2)$$

где $\gamma$ – коэффициент затухания волны.

Поверхность постоянной фазы волны называется волновой поверхностью. Все частицы СС на волновой поверхности колеблются в одинаковой фазе. Волновые поверхности для волны (7.1) – это перпендикулярные к направлению распространения волны плоскости, уравнения которых есть $\omega t - \kappa x = \text{const}$. Поэтому величина $\dot{x} = \omega/\kappa = v$ есть скорость волновых поверхностей – фазовая скорость волны.

## 7.2. Волновое уравнение

Закон (7.1) распространения гармонической плоской волны удовлетворяет уравнению переноса

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial\xi}{\partial t}, \qquad (7.3)$$

в котором $\frac{\partial\xi}{\partial t}$ – это проекция скорости колеблющейся частицы СС; $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ – относительная деформация среды, качественное изменение которых вдоль направления распространения волны $\xi(t,x)$ показано на рис. 9.2.

Одномерным волновым называется уравнение, следующее из (7.3):

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad (7.4)$$

которое справедливо для суперпозиции плоских волн

$$\xi(t,x) = f_{\rightarrow}(x - vt) + f_{\leftarrow}(x + vt), \qquad (7.5)$$

где $f_{\rightarrow}$ и $f_{\leftarrow}$ – произвольные функции, которые описывают бегущие со скоростью $v$ волны в направлении положительных и отрицательных значений $x$.

Если уравнение движения частицы СС удается привести к виду (7.4), то сразу можно утверждать о наличии волны, а из сопоставления этих уравнений легко найти скорость этой

волны. Например, второй закон Ньютона, записанный для малого элемента $\Delta x$ тонкого стержня сечением $S$ (рис. 9.3): $\rho \Delta x S \ddot{\xi} = F(x+\Delta x) - F(x) = S\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}\Delta x$ или $\rho \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ показывает, что наличие в стержне продольной волны, распространяющейся со скоростью

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,, \tag{7.6}$$

где $E$ – модуль Юнга; $\rho$ – плотность материала стержня.

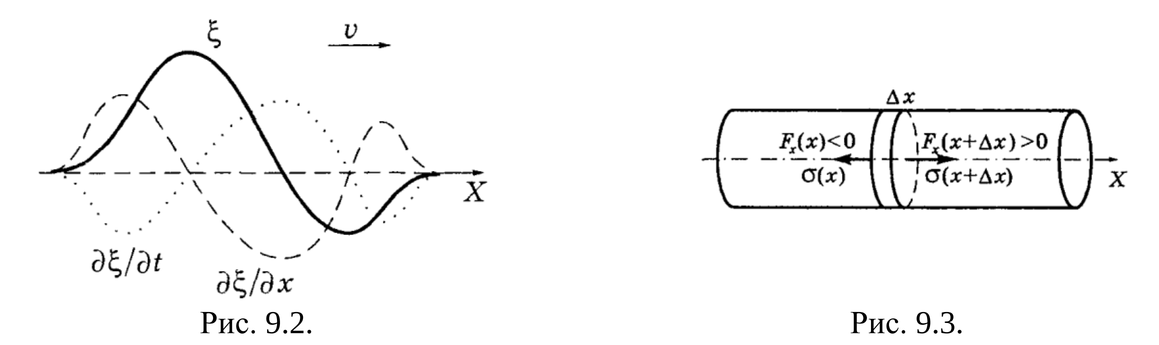



Рис. 9.2. Рис. 9.3.

# Глава 8. Релятивистское движение

Опыт показывает, что ньютоновское описание механического движения приемлемо только для медленных движений: $v \ll c$, $c = 3\cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме. Адекватное описание быстрого (релятивистского) движения со скоростями $v \le c$ дается специальной теорией относительности (**СТО**) или релятивистской механикой.

## 8.1. Кинематика специальной теории относительности

Кинематика специальной теории относительности построена на основе обобщающих опытные факты постулатах:

1. Принцип относительности: любое физическое явление протекает одинаковым образом во всех ИСО.

2. Принцип постоянства скорости света: скорость света в вакууме одинакова во всех ИСО и не зависит от скоростей движения источника и приемника света; это означает, что скорость света в вакууме имеет смысл предельной скорости распространения взаимодействия.

С учетом свойств однородности и изотропности пространства и однородности времени постулаты СТО приводят к преобразованиям Лоренца – формулам связи пространственно-временных координат одного и того же события в двух ИСО (рис. 8.1):

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{V}{c^2}x\right) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \dfrac{V}{c^2}x'\right) \end{cases} \tag{8.1}$$

здесь $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$ – лоренц-фактор; ИСО $S'$ движется относительно ИСО $S$ с постоянной скоростью $V$ вдоль оси X, причем событие ($\vec{r}=0, t=0$) в $S$ имеет координаты ($\vec{r}\,'=0, t'=0$) в $S'$.

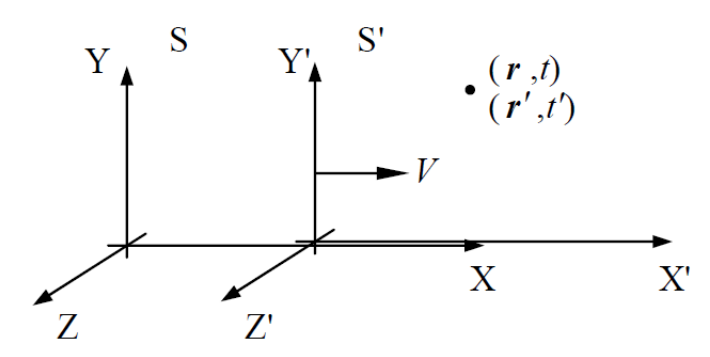



Рис. 8.1.

Интервалы пространственных координат и времени между двумя любыми событиями ($x_1, y_1, z_1, t_1$) и ($x_2, y_2, z_2, t_2$) в $S$ и этими же событиями ($x_1', y_1', z_1', t_1'$) и ($x_2', y_2', z_2', t_2'$) в $S'$:

$$\begin{cases} \Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t) \\ \Delta y' = \Delta y \\ \Delta z' = \Delta z \\ \Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \dfrac{V}{c^2}\Delta x\right) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Delta x = \gamma(\Delta x' + V\Delta t') \\ \Delta y = \Delta y' \\ \Delta z = \Delta z' \\ \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \dfrac{V}{c^2}\Delta x'\right) \end{cases} \qquad (8.2)$$

$\Delta x = x_2 - x_1,\ \Delta y = y_2 - y_1,\ \Delta z = z_2 - z_1,\ \Delta t = t_2 - t_1$;
$\Delta x' = x_2' - x_1',\ \Delta y' = y_2' - y_1',\ \Delta z' = z_2' - z_1',\ \Delta t' = t_2' - t_1'$.

Следствия преобразований Лоренца (8.1) и (8.2):

– относительность одновременности пространственно-разобщенных событий – если в $S$ $\Delta t = 0$ и $\Delta x \neq 0$, то в $S'$ $\Delta t' = -\gamma \dfrac{V}{c^2}\Delta x \neq 0$, т.е. события, происходящие одновременно в одной ИСО и имеющие различные пространственные координаты вдоль направления движения другой ИСО, не являются в ней одновременными;

– замедление времени – если в $S'$ $\Delta x' = 0$, то в $S$ $\Delta t = \gamma\Delta t'$ или $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\gamma}$, т.е. для ИСО, в которой события происходят в одной точке пространства, наблюдается сокращение интервала времени между этими событиями по сравнению с любой другой ИСО;

– сокращение длины – если в $S$ $\Delta t = 0$ и $\Delta x \neq 0$, то в $S'$ $\Delta x' = \gamma\Delta x$ или $\Delta x = \dfrac{\Delta x'}{\gamma}$, т.е. для ИСО, в которой события происходят одновременно, наблюдается сокращение пространственного интервала между этими событиями (по сравнению с любой другой ИСО) вдоль направления относительного движения систем.

– преобразование (сложение) скоростей

$$
\begin{cases}
v'_x = \dfrac{v_x - V}{1 - \dfrac{V}{c^2} v_x} \\
v'_y = \dfrac{\sqrt{1-(V/c)^2}\, v_y}{1 - \dfrac{V}{c^2} v_x} \\
v'_z = \dfrac{\sqrt{1-(V/c)^2}\, v_z}{1 - \dfrac{V}{c^2} v_x}
\end{cases}
\quad \text{или} \quad
\begin{cases}
v_x = \dfrac{v'_x + V}{1 + \dfrac{V}{c^2} v'_x} \\
v_y = \dfrac{\sqrt{1-(V/c)^2}\, v'_y}{1 + \dfrac{V}{c^2} v'_x} \\
v_z = \dfrac{\sqrt{1-(V/c)^2}\, v'_z}{1 + \dfrac{V}{c^2} v'_x}
\end{cases}
\qquad (8.3)
$$

Здесь $v_x = dx/dt, v_y = dy/dt, v_z = dz/dt$ – проекции скорости МТ в системе $S$; $v'_x = dx'/dt, v'_y = dy'/dt, v'_z = dz'/dt$ – проекции скорости этой же МТ в системе $S'$.

Если относительная скорость – скорость движения одной МТ относительно другой МТ не может быть больше скорости света, то скорость сближения двух МТ как скорость изменения расстояния между ними в данной СО может быть больше скорости света.

– инвариантность пространственно-временного интервала между событиями:

$$
S_{12} = \sqrt{r_{12}^2 - c^2 t_{12}^2} = \text{inv}, \qquad (8.4)
$$

где $r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} > 0$ – пространственный интервал; $t_{12} = |t_2 - t_1| > 0$ – временной интервал между событиями; $\text{inv}$ означает, что $S_{12} = S'_{12}$, т.е. одинаковость во всех ИСО.

Пространственно-временной интервал называется

– пространственноподобным, если $r_{12} > ct_{12}$;

– времениподобным, если $r_{12} < ct_{12}$;

– светоподобным, если $r_{12} = ct_{12}$.

Если события разделены времениподобным или светоподобным интервалами, то они могут быть связаны причинно-следственной связью.

## 8.2. Основы релятивистской динамики

В соответствии с принципом относительности уравнение движения должно быть инвариантным относительно преобразований Лоренца. Этому условию удовлетворяет релятивистское уравнение движения:

$$
\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad (8.5)
$$

где импульс МТ переопределяется формулой

$$
\vec{p} = \gamma m \vec{v} \qquad (8.6)
$$

с лоренц-фактором $\gamma = \sqrt{1-(v/c)^2}$ , зависящим от скорости МТ.

Применимость (8.5), (8.6) для описания “быстрых” движений МТ подтверждается опытом.

Релятивистское уравнение движения (8.5 – 8.6) в проекциях на орты $\vec{\tau}$ касательной и $\vec{n}$ главной нормали в произвольной точке траектории МТ:

$$\begin{cases} \gamma^2 m\dot{v} = F_\tau & (8.7а) \\ m\dfrac{v^2}{R} = F_n, & (8.7б) \end{cases}$$

показывает, что инертность МТ различна в направлении движения и ему перпендикулярном направлении. Поэтому ускорение и сила не совпадают по направлению (при условии $F_n = F_\tau$ : $a_\tau < a_n$).

Другим прямым следствием (8.5 – 8.6) является соотношение

$$d(\gamma mc^2) = \delta A, \qquad (8.7)$$

утверждающее, что в результате совершения силой работы $\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ приращение получает величина

$$E = \gamma mc^2, \qquad (8.8)$$

которая называется полной энергией МТ.

Если МТ неподвижна в данной СО, то ее полная энергия $E_0 = mc^2$ называется энергией покоя или собственной энергией. Ясно тогда, что кинетическая энергия релятивистской МТ равна

$$E_k = E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2. \qquad (8.9)$$

В предельном случае $v << c$ из (8.8) следует ньютоновское определение кинетической энергии $E_k = \dfrac{mv^2}{2}$.

Закон взаимосвязи (8.8) массы и энергии позволяет интерпретировать массу как меру энергосодержания тела. Изменение энергии тела всегда сопровождается эквивалентным изменением массы. В макромире изменения массы очень малы, в микромире – наблюдаются экспериментально, например, как дефект массы ядра.

# ЧАСТЬ II
# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

## Глава1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов.

### 1.1. Основные положения и понятия. Статистический и термодинамический методы исследования.

***Молекулярная физика*** – это раздел физики, изучающий физические свойства и строение вещества в различных агрегатных состояниях на основе молекулярного строения этих веществ.

Молекулярная физика рассматривает следующие явления и процессы:

- строение и свойства вещества и их изменение под влиянием внешних физических факторов (давления, температуры, электрического и магнитного полей и др.), критическое состояние вещества;
- явления переноса, такие как диффузия, теплопроводность, внутреннее трение;
- фазовое равновесие и фазовые переходы (кристаллизация и плавление, испарение и конденсация и др.);
- поверхностные явления на границе раздела различных фаз.

В основе молекулярной физики лежит ***молекулярно-кинетическая теория строения вещества (МКТ)***. МКТ включает три основных положения:

1. *Все тела состоят из большого числа мельчайших частиц (молекул и атомов), которые разделены промежутками.* Доказательством этого положения служат фотографии атомов и молекул, сделанные с помощью электронного микроскопа, возможность механического дробления вещества, растворение вещества в воде, сжатие и расширение газов.
2. *Атомы и молекулы всех веществ беспорядочно и хаотично движутся. Это движение называется тепловым.* Доказательством этого положения можно считать процесс диффузии (взаимное проникновение частиц одного вещества в частицы другого вещества при их тепловом движении) и броуновское движение мелких инородных, взвешенных в жидкости частиц под действием не скомпенсированных ударов молекул.
3. *Атомы и молекулы взаимодействуют между собой.* Причем, на малых расстояниях отталкиваются, а с увеличением расстояния силы отталкивания резко уменьшаются, и на каком-то расстоянии $\mathbf{r_0}$ обращаются в ноль. При дальнейшем увеличении расстояния переходят в силы притяжения (рис. 1.1), которые при увеличении расстояния сначала растут, затем достигнув максимального значения убывают до нуля.

Рис. 1.1

Основным методом исследования в молекулярной физике является ***статистический метод***, который предназначен для исследования систем, состоящих из большого числа частиц и учитывающий статистические закономерности и усредненные значения физических величин, которые могут охарактеризовать всю систему в целом. В качестве примера можно рассмотреть хаотическое движение совокупности молекул, из которых состоит вещество. Движение каждой молекулы в отдельности будет

подчиняться законам механики. В механике движение тела однозначно определяется заданными начальными условиями и силами, действующими на тело во время его движения. Зная все эти величины, можно вычислить положение молекул (тела) в любой момент времени, определить результат взаимодействия ее с другими молекулами (телами) и т.д. Такие явления описываются динамическими закономерностями. В статистической физике, рассматривается конкретная молекулярная модель и к ней, применяются математические методы статистики, основанные на теории вероятностей. Статистические закономерности, в отличие от динамических закономерностей, не определяются начальными условиями. Одним из понятий статистической физики является вероятность. Под вероятностью понимается предел, к которому стремится относительная частота появления некоторого события при достаточно большом, стремящемся к бесконечности числе повторений опыта (**N**) при неизменных внешних условиях.

Если при **N** опытах **n** раз получено определенное событие, то вероятность этого события будет

$$w = \frac{n}{N} \tag{1.1}$$

Величина вероятности **w** испытывает лишь небольшое отклонение от некоторого значения при любых, достаточно больших значениях числа опытов N. Статистические закономерности (законы статистической физики) выражают такие же объективные соотношения в природе, как и соотношения, определяемые динамическими закономерностями.

***Термодинамика*** – это наука о наиболее общих свойствах макроскопических физических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и о процессах перехода между этими состояниями. Термодинамика исследует условия превращения энергии из одного вида в другой и характеризует их с количественной стороны. В ее основе лежат фундаментальные законы (начала), установленные путем обобщения огромного числа опытных фактов. В отличие от молекулярно-кинетической теории термодинамика не рассматривает микроскопическое строение вещества, а выявляет связи между его макроскопическими свойствами в различных условиях. Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика взаимосвязаны и, дополняя друг друга, позволяют подходить к изучению физических свойств вещества с различных точек зрения. Например, термодинамика устанавливает количественную зависимость между температурой кипения жидкости и внешним давлением, но не раскрывает ее "механизма". Объяснить его может только молекулярно-кинетическая теория, рассматривающая связь между свойствами вещества и его молекулярным строением. В основе термодинамики лежит ***термодинамический метод*** – это метод исследования систем из большого числа частиц, но в отличии от статистического метода он не учитывает отдельные внутренние микроскопические состояния компонентов системы, а оперирует макроскопическими параметрами, такими как объем, давление, температура и др., при различных превращениях энергии внутри термодинамической системы.

Основными понятиями молекулярной физики и термодинамики являются:

- **Молекула** – наименьшая часть вещества, обладающая его основными химическими свойствами и состоящая из атомов, соединенных между собой химическими связями;
- **Атом** – часть вещества микроскопических размеров (микрочастица), наименьшая частица химического элемента, обладающая его свойствами. В случае одноатомных

молекул, например молекул инертных газов, понятия молекула и атом совпадают. Атом, в свою очередь, состоит из тяжелого положительно заряженного ядра и отрицательно заряженной электронной оболочки. Число электронов в оболочке атома равно заряду атома и соответствует порядковому номеру элемента в периодической системе. Ядра различных атомов отличаются одно от другого, тогда как электроны у них одинаковы. Атомы в разных сочетаниях входят в состав молекул разных веществ;

- **Относительная атомная масса** – отношение массы данного атома к 1/12 массы изотопа углерода с массовым числом 12 ($^{12}C$). Если брать химически простые вещества в таких количествах, чтобы отношение их масс было бы такое же, как и отношение их относительных масс, то они будут содержать одинаковое число атомов;
- **Относительная молекулярная масса** – отношение массы данной молекулы к 1/12 массы атома $^{12}C$. Следовательно, в любых веществах, взятых в таких количествах, что отношение их масс такое же, как и отношение их относительных молекулярных масс, будет содержаться одинаковое число молекул;
- **Моль** – единица количества вещества. Моль - количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов (атомов, молекул, ионов, электронов и других частиц или специфицированных групп частиц), сколько содержится атомов в изотопе (нуклиде) углерода $^{12}C$ массой 0,012 кг;
- **Число Авогадро** – число атомов или молекул в моле любого вещества ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ ***моль***$^{-1}$);
- **Молярная масса** – масса вещества, взятого в количестве одного моля.

$$\mu = m_0 \cdot N_A \qquad (1.2)$$

Молярная масса имеет разное значение для каждого вещества, но всегда содержит одинаковое число молекул. Молярная масса веществ, состоящих из одноатомных молекул, содержит одинаковое число атомов и ее, в этом случае, называют атомной массой;

- **Интенсивные параметры** – параметры, не зависящие от массы системы, т.е. имеющие одинаковые значения для любой макроскопической части однородной термодинамической системы, находящейся в равновесии (давление, температура, концентрация и др.);
- **Экстенсивные параметры** – параметры, значения, которых пропорциональны массе термодинамической системы или ее объему. Значение экстенсивных параметров системы равно сумме его значений для отдельных частей системы (объем, внутренняя энергия, энтропия и др.);
- **Равновесное состояние системы** – такое состояние системы, при котором в отсутствии внешних воздействий, т.е. в изолированной системе, все параметры системы приобретают определенные значения. Равновесное значение параметра состояния системы определяется как среднее значение параметра за большой промежуток времени, стремящийся к бесконечности;
- **Время релаксации** – время, в течение которого система приходит в равновесное состояние;
- **Неравновесное состояние** – состояние системы, выведенной из термодинамического равновесия. В системе, находящейся в неравновесном состоянии, происходят необратимые процессы, которые стремятся вернуть систему в состояние термодинамического (или статистического) равновесия, если нет препятствующих

этому факторов – отвода (или подвода) энергии или вещества из системы (в систему). В противном случае возможно стационарное неравновесное состояние (не изменяющееся со временем).

- **Процесс** – это любое изменение в термодинамической (статистической) системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее параметров состояния. Процесс называется ***обратимым***, если возможно осуществить обратный переход системы из конечного в начальное состояние через те же промежуточные состояния так, чтобы не осталось никаких изменений в окружающей систему среде. Если же такой обратный переход осуществить нельзя, или если по окончании процесса в окружающей среде или в самой системе произошли какие-либо изменения, то такой процесс называется ***необратимым***. К необратимым процессам относят любой процесс, сопровождаемый трением, процессы теплопередачи от нагретого тела к менее нагретому телу, расширение газов. ***Равновесным процессом*** называют такой процесс, который состоит из ряда следующих друг за другом равновесных состояний. Параметры двух таких соседних состояний отличаются на бесконечно малую величину. ***Неравновесный процесс*** – это процесс, протекающий с конечной скоростью и вызывающий конечное изменение (появление конечных градиентов) параметров состояния системы.

## 1.2 Модель идеального газа. Опытные законы идеального газа

***Идеальный газ – это физическая модель,*** согласно которой:

1. Собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда.
2. Силы взаимодействия между молекулами газа отсутствуют.
3. Столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Исходя из этого, идеальный газ можно рассматривать как совокупность беспорядочно движущихся молекул-шариков, имеющих пренебрежимо малый собственный объем и не взаимодействующих друг с другом на расстоянии.

Различают идеальный классический и идеальный квантовый газы. Свойства ***идеального классического газа*** описываются законами классической физики – уравнением Клапейрона и его частными случаями. ***Реальные газы*** хорошо описываются моделью идеального классического газа, если они достаточно разряжены. Законы, описывающие поведение идеального газа, были установлены еще до появления молекулярно-кинетической теории:

- закон Бойля-Мариотта;
- закон Гей-Люссака;
- закон Шарля;
- закон Дальтона;
- закон Авогадро.

**Закон Бойля-Мариотта.** ***Изотермический процесс*** **(*T=const*)** – называют квазистатический процесс, протекающий при неизменной температуре. Уравнения изотермического процесса.

$$pV = const \text{, при } T=const \text{ и } m=const \qquad (1.3)$$

Для данной массы газа ***m*** при постоянной температуре ***T*** произведение давления ***p*** на объем ***V*** есть величина постоянная.

Уравнение изотермического процесса (1.3) было получено экспериментально английским физиком Р. Бойлем (1662 г.) и независимо французским физиком Э. Мариоттом

(1676 г.). кривая, изображающая зависимость между $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{V}$, характеризующая свойства вещества при постоянной температуре, называется ***изотермой.*** Изотермы – гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура происходящего процесса (рис. 1.2).

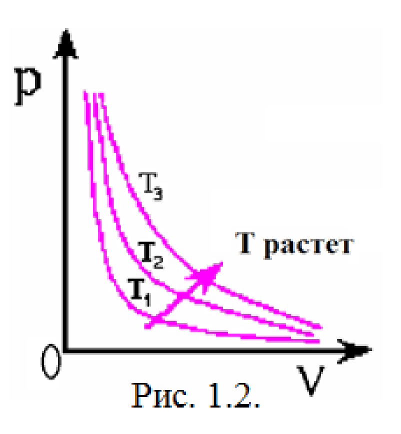


Рис. 1.2.

**<u>Закон Гей-Люссака.</u>** ***Изобарный процесс*** (*p=const*) – это квазистатический процесс нагревания или охлаждения газа, протекающий при неизменном давлении. Зависимость объема газа от его температуры при постоянном давлении была экспериментально исследована в 1862 году французским физиком Ж. Гей-Люссаком.

Уравнение изобарного процесса, для некоторой неизменной массы газа ***m*** имеет вид:

$$V = V_0(1+\alpha t)\text{, при } \boldsymbol{p=const} \text{ и } \boldsymbol{m=const} \qquad (1.4)$$

где $V_0$ – объем газа при температуре 0ºС, коэффициент **α**=1/273,15 К$^{-1}$, называют ***температурным коэффициентом объемного расширения газов.*** Он показывает, как изменилась каждая единица начального объема газа от нагревания его на 1 градус от начального объема.

Из уравнения изобарного процесса следует, что объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой (рис. 1.3).

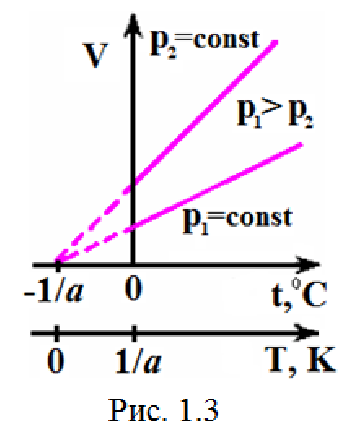


Рис. 1.3

В координатах (*V, P)* изобарные процессы при разных значениях давления *p* изображаются семейством прямых, которые называют ***изобарами.*** Чем больше давление газа, тем меньше угол наклона изобары к оси температур. Зависимость можно записать в виде соотношения:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}\text{, при } \boldsymbol{p=const} \text{ и } \boldsymbol{m=const} \qquad (1.5.)$$

***<u>Закон Шарля.</u>*** ***Изохорный процесс*** (*V=const)* – это процесс квазистатического нагревания или охлаждения газа при постоянном объеме. Уравнение изохорного процесса для некоторой неизменной массы газа имеет вид:

$$p = p_0(1+\alpha t)\text{, при } \boldsymbol{V=const} \text{ и } \boldsymbol{m=const} \qquad (1.6)$$

где $p_0$ – давление газа при температуре при температуре 0ºС, коэффициент **α**=1/273,15 К$^{-1}$, называют ***температурным коэффициентом давления газов.*** Он показывает, как изменилась каждая единица начального давления газа от нагревания его на 1 градус от начального давления.

Из уравнения изохорного процесса следует, что давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой и может быть записано в виде соотношения:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}\text{, при } \boldsymbol{V=const} \text{ и } \boldsymbol{m=cons} \qquad (1.7)$$

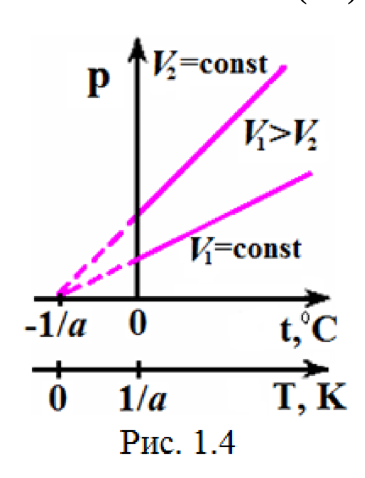


Рис. 1.4

В координатах (*p, T*) изохорные процессы при различных значениях объема изображаются семейством прямых линий – изохор. Большему значению объема соответствуют прямые с меньшим углом наклона изохоры к оси температур (рис. 1.4).

Экспериментально зависимость давления газа от его температуры при постоянном объеме исследовал французский физик Ж. Шарль в 1787 году.

***Закон Авогадро.*** *В равных объёмах различных газов, взятых при одинаковых температурах и давлениях, содержится одно и то же число молекул.* В виде гипотезы был сформулирован в 1811 году А. Авогадро, профессором физики в Турине. Его гипотеза была подтверждена многочисленными экспериментальными данными и стала называться *законом Авогадро.* Дадим определения понятиям, которые необходимы для понимания закона Авогадро и следствий из него.

***Количество вещества, ν*** – физическая величина, определяемая числом специфических структурных элементов: молекул, атомов или ионов, из которых состоит вещество. Единицей количества вещества является ***моль*** – количество вещества системы, в которой содержится столько же частиц, сколько атомов в 0,012 кг изотопа $^{12}$**C.**

Таким образом, в 1 моле любого вещества содержится число молекул равное $N_A$. Эта величина называется число Авогадро и равна $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ ***моль***$^{-1}$. Число Авогадро – одна из важнейших постоянных в молекулярно-кинетической теории. Количество вещества определяется как отношение числа молекул вещества $N$ к постоянной Авогадро $N_A$:

$$\nu = \frac{N}{N_A} \tag{1.8}$$

На основании этого можно сформулировать следствие закона Авогадро. *Моли любых газов при одинаковой температуре и давлении занимают одинаковые объемы.* При нормальных условиях ($t = 0^oC$, $p = 10^5$ ***Па***), он называется ***молярным объемом*** и равен:

$$V_M = 22{,}41 \cdot 10^{-3}\ м^3/моль = 22{,}41\ л/моль.$$

Массу одного моля называют ***молярной массой М.*** Молярная масса равна произведению массы одной молекулы данного вещества $m_0$ на постоянную Авогадро:

$$M = m_0 \cdot N_A \tag{1.9}$$

Единица измерения молярной массы – (*кг/моль*).

Для веществ, молекулы которых состоят из одного атома, используется термин ***атомная масса***. За единицу массы атомов и молекул принимают 1/12 массы атома изотопа углерода $^{12}$C (с массовым числом 12). Она называется ***атомная единица массы*** (***а.е.м.***).

$$1\ а.е.м. = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ кг.$$

Эта величина практически совпадает с массой протона или нейтрона. Отношение массы атома или молекулы данного вещества к атомной единице массы называется ***относительной массой.***

***Закон Дальтона.*** *Давление смеси идеальных, невзаимодействующих газов равно сумме парциальных давлений входящих в нее газов:*

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum^n p_i \tag{1.10}$$

***Парциальное давление*** **–** давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

## 1.3 Уравнение состояния идеального газа

***Уравнением состояния*** называется уравнение, которое связывает макропараметры термодинамической системы: давление $\boldsymbol{p}$, объем $\boldsymbol{V}$ и температуру $\boldsymbol{T}$, находящейся в состоянии термодинамического равновесия:

$$f(p,V,T)=0, \qquad (1.11)$$

где каждая из переменных является функцией двух других.

Клайперон вывел уравнение, объединив законы Шарля и Бойля-Мариотта. Пусть некоторая масса газа занимает объем $V_1$, имеет давление $p_1$ и находится при температуре $T_1$. Эта же масса газа в другом произвольном состоянии характеризуется параметрами $V_1$, $p_2$ и $T_2$. Переход из состояния 1 в состояние 2 осуществляется последовательно изотермическим (**1-1’**) и изохорным (**1’-2**) процессами (рис. 1.5). Объединяя законы Бойля-Мариотта и Шарля, получим:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}, \text{или } \frac{pV}{T}=const \qquad (1.12)$$

Менделеев объединил законы Клайперона и Авогадро для 1 моля вещества. По закону Авогадро при одинаковых $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{T}$ моли всех газов занимают одинаковый молярный объем $V_M$. Уравнения состояния для моля идеального газа:

$$\frac{pV_M}{T}=R=const \qquad (1.13)$$

где, константа $\boldsymbol{R}$ – ***универсальная газовая постоянная.*** Численное значение R определяется, полагая, что газ находится при нормальных условиях.

***R=8,31 Дж/моль·К***

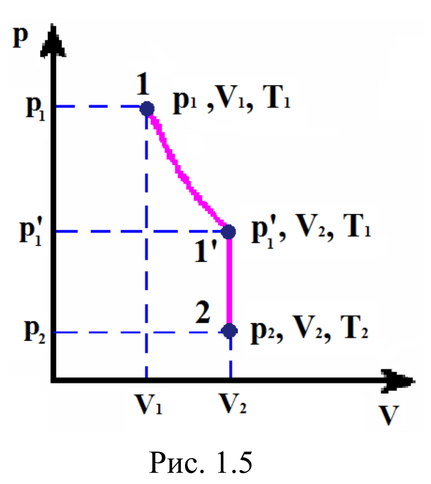



Рис. 1.5

Объем газа массы $\boldsymbol{m}$ равен $V=\frac{m}{M}V_M$, тогда уравнение состояния для произвольной массы идеального газа имеет вид:

$$pV=\frac{m}{M}RT=\nu RT \qquad (1.13)$$

Это уравнение состояния идеального газа называется ***уравнением Клайперона-Менделеева.*** Введя в уравнение постоянную Больцмана, получим следующую форму записи уравнения состояния идеального газа:

$$pV=\frac{N}{N_A}RT=NkT \quad \text{или} \quad p=\frac{NkT}{V}=nkT \qquad (1.14)$$

где $\boldsymbol{k=1{,}38\cdot10^{-23}}$ ***Дж/К*** (постоянная Больцмана), $\boldsymbol{n}$ – концентрация молекул газа.

Таким образом, из уравнения $p=nkT$ следует, что:

1. давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул;
2. при одинаковой температуре и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул.

Число молекул, содержащихся в 1 м$^3$ газа при нормальных условиях, называется ***числом Лошмидта***:

$$N_L = \frac{p_0}{kT_0} = 2{,}68 \cdot 10^{25}\ {}^{1}\!/\!_{м^3} \qquad (1.15)$$

## 1.4. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Пусть в сосуде объемом ***V*** находится идеальный одноатомный газ массой ***m***, состоящий из ***N*** молекул массой ***m₀***, движущихся с одинаковыми скоростями v. Концентрация молекул газа по определению ***n=N/V***.

Предполагаем, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа мало по сравнению с числом столкновений молекул газа со стенками сосуда. Соударения со стенками абсолютно упругие. Если при соударениях со стенками за время Δ***t*** элементарной площадке Δ***S*** стенке сосуда передается импульс Δ***P***, то давление газа, оказываемое им на стенку сосуда будет:

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{1}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta t} \qquad (1.16)$$

При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно стенке, передает ей импульс

$$m_0 v - (-m_0 v) = 2m_0 v$$

За время Δ***t,*** стенки сосуда достигнут молекулы, заключенные в объеме ***V***=Δ***S·l***=Δ***S·v***·Δ***t*** (рис. 1.6). Тогда, число молекул ***N=n·V=n***·Δ***S·v***·Δ***t.***

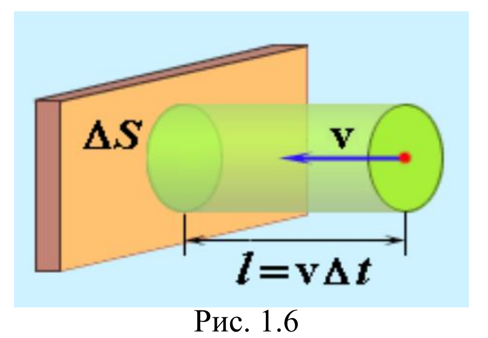


Рис. 1.6

В среднем по направлению к стенке сосуда движется 1/6 часть всех молекул. (В любой момент времени молекулы движутся вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, значит, в среднем, 1/3 молекул движется вдоль каждого направления и только половина из 1/3 движется в одну сторону.) Поэтому, за время Δ**t** площадки площадью Δ**S** достигнет $\frac{1}{6} n v \Delta t \Delta S$ молекул и передадут ей импульс

$$\Delta P = 2m_0 v \cdot \frac{1}{6} n v \Delta t \Delta S \quad \text{или} \quad \Delta P = \frac{1}{3} m_0 v^2 n \Delta t \Delta S \qquad (1.17)$$

Давление, оказываемое газом на стенку сосуда:

$$p = \frac{1}{3} m_0 v^2 n \qquad (1.18)$$

При различных скоростях молекул, принято использовать ***среднюю квадратичную скорость,*** которую можно определить как

$$\langle v_{кв} \rangle^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2 = \frac{1}{N} \int_0^{v_{max}} v^2 dN_v\ , \qquad (1.19)$$

и характеризует подвижность всей совокупности молекул газа (поскольку средняя скорость хаотично движущихся молекул идеального газа, который не перемещается, равна нулю).

***Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов:***

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v_{кв} \rangle^2 \qquad (1.20)$$

С учетом соотношений

$$n = \frac{N}{V}, \quad m = N \cdot m_0, \quad \rho = \frac{m}{V}$$

можно записать другие варианты этого уравнения:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_0 \rangle \quad \text{или} \quad pV = \frac{2}{3} N \langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{2}{3} E \tag{1.21}$$

$$p = \frac{1}{3} m_0 \frac{N}{V} \langle v_{кв} \rangle^2 = \frac{1}{3} \rho \langle v_{кв} \rangle^2 \quad \text{или} \quad pV = \frac{1}{3} m \langle v_{кв} \rangle^2 \tag{1.22}$$

где $\langle \varepsilon \rangle$ - кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы газа,

$E$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Используя соотношение (1.22) и уравнение Менделеева-Клайперона для одного моля получим

$$pV_M = \frac{1}{3} M \langle v_{кв} \rangle^2 = RT \tag{1.23}$$

Используя (1.23) получим выражение для ***средней квадратичной скорости***

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} \tag{1.24}$$

где $\boldsymbol{M = m_0 \cdot N_A}$, и $\boldsymbol{k = R/N_A}$.

Из полученных соотношений (1.14) и (1.21) получим выражение для расчета ***средней кинетической энергии поступательного движения одной молекулы идеального газа:***

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT \tag{1.25}$$

Откуда следует, что при $\boldsymbol{T = 0K}$ $\langle \varepsilon_0 \rangle \boldsymbol{= 0}$ и движение молекул газа прекращается.

***Молекулярно-кинетическое толкование температуры:*** *термодинамическая температура это мера средней кинетической энергии поступательного движения молекул газа.*

## 1.5. Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям.

В газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющиеся со временем распределение молекул по скоростям. Это распределение описывается функцией ***f(v)***, которая называется ***функция распределения молекул по скоростям*** (рис. 1.7). функция распределения определяет относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от ***v*** до ***v+dv***, т.е.

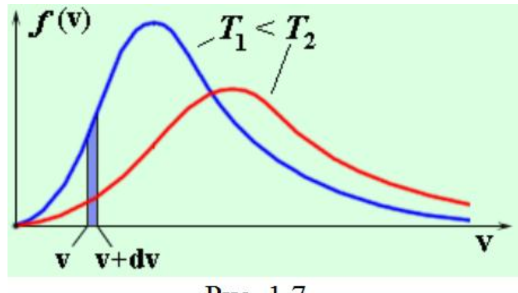


Рис. 1.7

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv \quad \text{или} \quad f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv} \tag{1.26}$$

***Закон Максвелла (функция распределения молекул по скоростям):***

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}v^2\cdot e^{-\frac{m_0v^2}{2kT}} \qquad (1.27)$$

Вид функции распределения ***f(v)*** зависит от массы молекулы газа $\boldsymbol{m_0}$ и температуры ***T***. Относительное число молекул $\frac{dN(v)}{N}$, скорости которых лежат в интервале от ***v*** до ***v+dv***, находится как площадь заштрихованной полоски (рис. 1.7). Площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Это означает, что функция ***f(v)*** удовлетворяет ***условию нормировки:***

$$\int_0^\infty f(v)dv=1 \qquad (1.28)$$

**Наиболее вероятная скорость молекул идеального газа.**

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется ***наиболее вероятной скоростью*** $\boldsymbol{v_в}$. Значение наиболее вероятной скорости можно найти, приравняв производную $\frac{df(v)}{dv}$ к нулю:

$$v_в=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}} \qquad (1.29)$$

Из формулы видно, что с повышением температуры $\boldsymbol{v_в}$ растет. Это означает, что при повышении температуры максимум функции распределения смещается вправо (рис. 1.7). при этом площадь фигуры, ограниченная кривой остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

**Средняя скорость молекулы газа (средняя арифметическая скорость).**

Средняя арифметическая скорость определяется из следующего соотношения

$$\langle v\rangle=\frac{1}{N}\int_0^\infty vdN(v)=\int_0^\infty vf(v)dv\text{, откуда}$$

$$\langle v\rangle=\sqrt{\frac{8kT}{\pi\cdot m_0}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \qquad (1.30)$$

**Средняя квадратичная скорость молекулы газа.**

Средняя квадратичная скорость может быть найдена с помощью распределения Максвелла:

$$\langle v_{кв}\rangle=\sqrt{\langle v^2\rangle}=\int_0^\infty v^2f(v)dv,$$

откуда $$\langle v_{кв}\rangle=\sqrt{\frac{3kT}{m_0}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (1.31)$$

Итак, существует три скорости, характеризующие молекулы газа: наиболее вероятная, средняя арифметическая скорость и средняя квадратичная скорость. Их положение на кривой зависимости ***f(v)*** показано на рисунке 1.8.

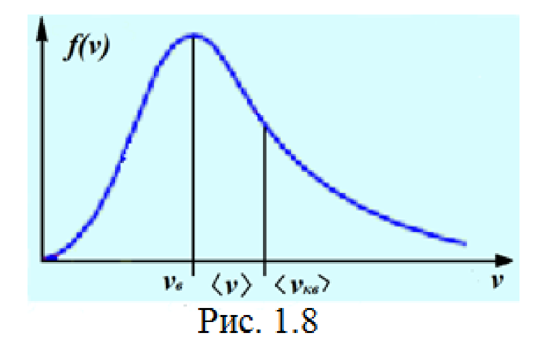



Рис. 1.8

Скорости, характеризующие состояние газа:

| **Наиболее вероятная скорость, $v_в$** | **Средняя арифметическая скорость, $\langle v\rangle$** | **Средняя квадратичная скорость, $\langle v_{кв}\rangle$** |
|---|---|---|
| $v_в=\sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$ | $\langle v\rangle=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}=1,13v_в$ | $\langle v_{кв}\rangle=\sqrt{\dfrac{3RT}{M}}=1,22v_в$ |

Исходя из распределения молекул по скоростям

$$dN(v)=Nf(v)dv=N\cdot 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}v^2\cdot e^{-\frac{m_0v^2}{2kT}}dv \qquad (1.32)$$

можно найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии. Для этого перейдем от переменной $v$ к переменной $\varepsilon=m_0v^2/2$. Тогда $v=\sqrt{2\varepsilon/m_0}$, значит

$dv=(2m_0\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}d\varepsilon$. Заменяя в (1.32), получим

$$dN(\varepsilon)=\frac{2N}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\qquad d\varepsilon=Nf(\varepsilon)d\varepsilon \qquad (1.33)$$

где, ***dN(ε)*** – число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от $\varepsilon$ до $\varepsilon+d\varepsilon$.

Таким образом, ***функция распределения молекул газа по энергиям теплового движения:***

$$dN(\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{(kT)}} \qquad (1.33)$$

Средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа может быть определена как

$$\langle\varepsilon\rangle=\int_0^\infty\varepsilon f(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-\frac{3}{2}}\int_0^\infty\varepsilon^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{\varepsilon}{(kT)}}d\varepsilon,\ \text{отсюда}$$

$$\langle\varepsilon\rangle=\frac{3}{2}kT \qquad (1.34)$$

## 1.6. Барометрическая формула. Распределение Больцмана.

В однородном поле тяготения Земли тепловое движение молекул приводит к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа с высотой убывает. Предположим, что поле тяготения однородно, температура постоянна и масса всех молекул одинакова.

Если атмосферное давление на высоте ***h*** равно ***p*** (рис. 1.9), то на высоте ***h+dh*** оно равно ***p+dp*** (при ***dh>0 dp<0*** , т.к. давление с высотой убывает). Разность давлений ***p*** и ***p+dp*** равна весу газа, заключенного в объеме цилиндра высотой ***dh*** с основанием площадью ***S***=1м$^2$:

Рис. 1.9

***p-(p+dp)=mg=ρSgdh= ρgdh***

где ***ρ*** – плотность газа на высоте ***h*** (***dh*** настолько мало, что при изменении высоты в этом пределе плотность газа можно считать постоянной). Следовательно,

$$dp=-\rho g dh. \qquad (1.35)$$

Из уравнения Менделеева-Клайперона найдем плотность газа:

$$pV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{M}RT \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}.$$

Подставляя выражение для плотности в (1.35) получим

$$dp = -\frac{pM}{RT}gdh \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh. \qquad (1.36)$$

С изменением высоты от $\boldsymbol{h_1}$ до $\boldsymbol{h_2}$ давление изменяется от $\boldsymbol{p_1}$ до $\boldsymbol{p_2}$ , т.е.:

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}\int_{h_1}^{h_2}dh, \Rightarrow \ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{Mg}{RT}\left(h_2 - h_1\right) \qquad (1.37)$$

Давление газа с молярной массой $\boldsymbol{M}$ на высоте $\boldsymbol{h}$ относительно уровня моря, где давление $\boldsymbol{p_0}$ считается нормальным, равно

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} \qquad (1.38)$$

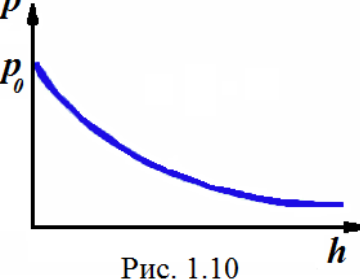


Рис. 1.10

Выражение (1.38) называется ***барометрическая формула.*** Из нее следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ (рис. 1.10). Прибор для определения высоты над земной поверхностью называется ***высотомер***. Принцип его работы основан на использовании барометрической формулы. Подставив выражение $\boldsymbol{p=nkT}$ в барометрическую формулу, преобразуем ее к виду

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}} \qquad (1.39)$$

где $\boldsymbol{n}$ – концентрация молекул на высоте $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{n_0}$ – концентрация молекул на высоте $\boldsymbol{h_0}$.

Зная, что $\boldsymbol{M=m_0 \cdot N_A}$, и $\boldsymbol{R=k \cdot N_A}$, можем записать

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}} = n_0 e^{-\frac{\Pi}{kT}}, \qquad (1.40)$$

где $\boldsymbol{\Pi=m_0gh}$ – потенциальная энергия молекулы в поле тяготения планеты.

Такое распределение называют ***распределением Больцмана*** для внешнего потенциального поля, описывающее распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа будет больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул. Если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического теплового движения, то ***распределение Больцмана*** справедливо не только в поле сил тяжести, но и в любом внешнем потенциальном поле.

## 1.7. Средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. Термин «столкновение» по отношению к молекулам не стоит воспринимать буквально и представлять этот процесс подобно процессу соударения твердых шаров. Столкновение молекул – это процесс взаимодействия между ними, в результате которого молекулы меняют направление движения.

Путь, который проходит молекула между двумя последовательными столкновениями, называется ***средней длиной свободного пробега молекулы*** $\boldsymbol{\langle l \rangle}$**.**

Средняя длина свободного пробега молекулы относится к случайным величинам. Один раз молекуле удастся пролететь между последовательными соударениями большой путь, а в другой раз этот путь может оказаться очень незначительным. Поэтому и вводится понятие средней длины свободного пробега молекулы $\langle l \rangle$.

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется ***эффективным диаметром молекулы d*** (рис. 1.11). Величина $\sigma = \pi d^2$ – называется ***эффективным сечением*** молекулы. Эффективный диаметр молекулы зависит от энергии и температуры. С ростом температуры эффективный диаметр молекулы уменьшается, т.к. увеличивается кинетическая энергия молекулы.

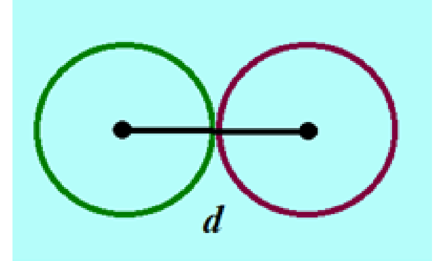


Рис. 1.11.

За 1 с молекула проходит путь, равный средней арифметической скорости $\langle v \rangle$. Если за 1 с молекула претерпевает в среднем $\langle z \rangle$ столкновений, то средняя длина свободного пробега будет равна

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}$$

***Среднее число столкновений*** $\langle z \rangle$ молекулы за 1 с при учете движения других молекул, как показывают расчеты, будет равно

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle$$

где $n$ – концентрация молекул. Тогда средняя длина свободного пробега молекулы

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad \text{или} \quad \langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

т.е. $\langle l \rangle$ обратно пропорциональна концентрации молекул. Из соотношения $p=nkT$ также следует, что при постоянной температуре концентрация пропорциональна давлению. Следовательно, запишем

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

При нормальных условиях ($p=10^5$ *Па*, $T=273K$ или $t=0^{\circ}C$) $\langle l \rangle \sim 10^{-7}$м, $d \sim 10^{-10}$м, $\langle z \rangle \sim 10^9 \div 10^{10}\ 1/c$.

Состояние газа, при котором $\langle l \rangle$ становится соизмеримой с размерами сосуда, называется ***вакуум***.

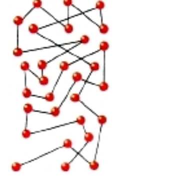
## 1.8. Экспериментальное подтверждение молекулярно-кинетической теории

Запишем основные положения МКТ и их опытное обоснование:

| ***Положения:*** | ***Опытное обоснование:*** |
|---|---|
| **1.** *Все тела состоят из частиц (атомов, молекул, ….).* | ➢ крошение вещества,<br>➢ испарение жидкостей,<br>➢ фотографии, сделанные с помощью туннельного микроскопа. |
| **2.** *Частицы находятся в непрерывном хаотическом (тепловом) движении.* | ➢ броуновское движение,<br>➢ испарение,<br>➢ диффузия. |

| | |
|---|---|
| **3.** *Между частицами существует межмолекулярное взаимодействие (притяжение и отталкивание).* | ➢ сохранение формы твердых тел ($\boldsymbol{F_{пр}}$),<br>➢ упругость тел ($\boldsymbol{F_{пр}}$ и $\boldsymbol{F_{от}}$)<br>➢ слипание тел с отшлифованными поверхностями. |

**Броуновское движение.** Наиболее ярким экспериментальным подтверждением представлений молекулярно-кинетической теории о беспорядочном движении атомов и молекул является броуновское движение. Это тепловое движение мельчайших частиц, взвешенных в жидкости или газе. Явление было открыто английским ботаником Робертом Броуном в 1827 г. броуновские частицы движутся под влиянием беспорядочных ударов молекул среды, в которой они взвешены. Вследствие хаотического теплового движения молекул эти удары никогда не уравновешивают друг друга. В результате скорость броуновской частицы постоянно меняется по величине и направлению, а ее траектория представляет собой сложную зигзагообразную кривую (рис. 1.12). Теория броуновского движения была создана А. Эйнштейном в 1905 г., а получила экспериментальное подтверждение в опытах французского физика Жана Перрена (1908-1911 гг.).



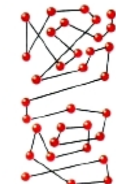


Рис. 1.12.

**Опыт Штерна**. Опыт, впервые проведён немецким физиком Отто Штерном в 1920 году. Опыт явился одним из первых практических доказательств состоятельности молекулярно-кинетической теории строения вещества. В нём были непосредственно измерены скорости теплового движения молекул и подтверждено наличие распределения молекул газов по скоростям. Экспериментальная установка, представляла собой два коаксиальных цилиндра, синхронно вращаются в вакууме (рис. 1.13). Атомы серебра, испаряяс с проволоки, расположенной вдоль оси внутреннего цилиндра, вылетают через щель и оседают на внутренней стенке наружного цилиндра. Исследуя толщину осажденного слоя, можно оценить ***распределение молекул по скоростям,*** которое соответствует ***максвелловкому*** распределению.

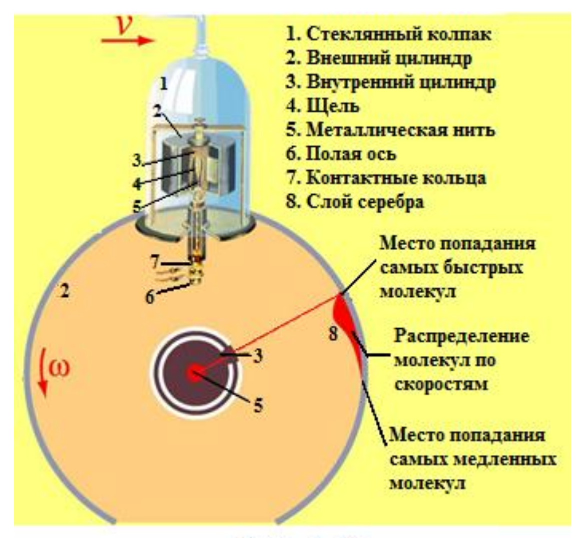



Рис. 1.13

**Опыт Ламмерта.** Прямые измерения скорости атомов ртути в пучке были выполнены Ламмертом в 1929 году. Между источником молекулярного пучка и приемником синхронно вращаются два диска с радиальными щелями (рис. 1.14). Из числа молекул, протелетевших через первую щель, пролетят через второй диск только те, которые подлетят к нему в тот момент, когда на пути пучка будет прорезь во втором диске. Изменяя угловую скорость




Рис. 1.14.

с помощью установки можно исследовать распределение молекул по скоростям.

**Опыт Перрена.** До опыта Ж.Б. Перрена молекулярно-кинетическая теория, несмотря на ее убедительность и большое число сторонников, существовала лишь в статусе теоретической гипотезы. Опыт Перрена был первым фундаментальным экспериментом, который подтвердил справедливость этой теории. Своим опытом Перрен окончательно доказал реальность молекул и верность молекулярного учения о строении вещества. Было найдено значение числа Авогадро – одной из фундаментальных постоянных, определяющих строение нашего мира. Исследуя под микроскопом броуновское движение, Перрен обнаружил, что броуновские частицы распределяются по высоте, подобно молекулам в поле тяготения (рис. 1.15). Применяя к ним распределение Больцмана, запишем

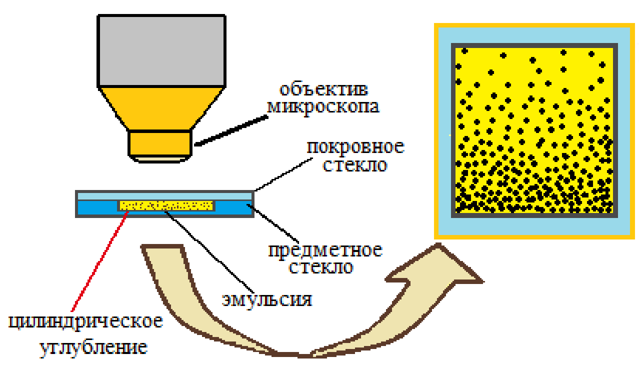



Рис. 1.15.

$$n = n_0 e^{-\frac{(m-m_1)gh}{kT}},$$

где $m$ – масса частицы, $m_1$ – масса вытесненной ею жидкости. Учитывая, что

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \text{и} \quad m_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1$$

где, $r$ – радиус частицы, $\rho$ – плотность частицы, $\rho_1$ – плотность жидкости.

Если $n_1$ и $n_2$ – концентрация частиц на уровнях $h_1$ и $h_2$, а $k=R/N_A$ то

$$N_A = \frac{3RT\ln(n_1/n_2)}{4\pi r^3(\rho-\rho_1)g(h_2-h_1)}$$

## 1.9. Явления переноса

**Явления переноса** – это необратимые процессы в термодинамически неравновесных системах, в которых происходит перенос ***энергии*** (теплопроводность), ***массы*** (диффузия) или ***импульса*** (внутренняя энергия). Причиной любого явления переноса является наличие градиента некоторой физической величины.

Рассмотрим одномерные случаи переноса, приняв за ось $Ox$ направление переноса.

**1. Теплопроводность.** Если в одной части газа средняя кинетичсекая энергиямолекул больше, чем в другой, то с течением времени из-за постоянных столкновений между молекулами будет проиходить процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, а значит и выравнивание температур. Перенос энергии в форме теплоты можно описать ***законом Фурье***:

$$j_E = -\lambda\frac{dT}{dx}, \qquad \lambda = \frac{1}{3}c_V \rho\langle v\rangle\langle l\rangle \tag{1.41}$$

Где $j_E$ – ***плотность теплового потока*** (тепловая энергия, переносимая в еденицу времени через единичную прощадку, перпендикулярную оси $0x$), $\lambda$ – *коэффициент теплопроводности*, $dT/dx$ – *градиент температуры* (скорость изменения температуры на еденицу длины $x$ в направлении нормали к этой площадке), $c_V$ – ***удельная теплоемкость***

***газа*** при постоянном объеме (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К), $\boldsymbol{\rho}$ *– плотность газа,* $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ *- средняя скорость теплового движения молекул,* $\langle \boldsymbol{l} \rangle$ *– средняя длина свободного пробега.*

Знак минус показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому знаки $\boldsymbol{j_E}$ и $dT/dx$ противоположны).

**2. Диффузия**. ***Явление диффузии*** заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся жидкостей, газов и твердых тел. Диффузия сводится к обмену частицами (происходит перенос массы) между этими телами и продолжается, пока существует градиент плотности.

Диффузия для химичеси однородного газа подчиняется ***закону Фика:***

$$j_m = -D\frac{d\rho}{dx}, \qquad D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle \tag{1.42}$$

Здесь $\boldsymbol{j_m}$ ***– плотность потока массы*** (масса вещества диффундирующего в еденицу времени через еденичную площадку, перпендикулярную оси $\boldsymbol{0x}$), $\boldsymbol{D}$ ***– коэффициент диффузии,*** $d\rho/dx$ *- градиент плотности,* равный скороси изменения плотности на еденицу длины $\boldsymbol{x}$ в направлении нормали к этой площадке.

Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому знаки $\boldsymbol{j_m}$ и $d\rho/dx$ противоположны).

**3. Внутренне трение (вязкость).** Рассмотрим механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с разными скоростями. Вследствии хаотического теплового движения молекул происходит обмен молекулами между слоями газа (жидкости), в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, а импульс слоя, движущегося медленнее увеличивается, то есть происходит перенос импульса от одного слоя к другому. Это приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

***Внутреннее трение*** описывается ***законом Ньютона:***

$$F = \eta\left|\frac{dv}{dx}\right|S, \tag{1.43}$$

где $\boldsymbol{\eta}$ ***– динамическая вязкость,*** $dv/dx$ ***- градиент скорости,*** показывающий быстроту изменения скорости в направлении $\boldsymbol{x}$, препендикулярном направлению движения слоев газа (жидкости), $\boldsymbol{S}$ *– площадь соприкасающихся слоев,* на которую действует сила $\boldsymbol{F}$.

По второму закону Ньютона взаимодействие двух слоев можно рассматривать как процесс, при которм от одного слоя к другому в еденицу времени пердается импульс, по модулю равный действующей силе:

$$F = \frac{dp}{dt}, \quad \text{откуда} \quad \frac{F}{S} = \frac{1}{S}\frac{dp}{dt} = j_p \quad \text{или} \quad j_p = -\eta\frac{dv}{dx} \tag{1.44}$$

где $\boldsymbol{j_p}$ ***– плотность потока импульса*** (полный импульс, переносимый в еденицу времени в положительном направлении оси $\boldsymbol{0x}$ через единичную площадку, перпендкулярную оси $\boldsymbol{0x}$).

Знак минус показывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости (поэтому знаки знаки $\boldsymbol{j_p}$ и $dv/dx$ противоположны).

Динамическая вязкость $\boldsymbol{\eta}$ численно равна плотности потока импульса при градиенте скорости равном единице.

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle$$

В основе явлений теплопроводности, диффузии и внутреннего трения лежит единый ***молекулярный механизм*** перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновения друг с другом, поэтому математические выражения, которые их описывают имеют внешнее сходство (1.41, 1.42 и 1.44). Формулы для коэффициентов ***λ, D,*** и ***η*** связывают коэффициенты переноса и основные характеристики теплового движения молекул. Зависимость между ***λ, D,*** и ***η*** выражается следующим образом:

$$\eta = \rho D, \quad \frac{\lambda}{\eta c_V} = 1$$

# <u>Глава 2.</u> Основы термодинамики

## 2.1. Число степеней свободы. Закон Больцмана.

Любое тело может участвовать в трех видах механического движения: поступательном, вращательном и колебательном. Для описания каждого вида движения необходимо задать некоторое количество начальных координат и следить за их изменением. Исходя из этого определяется кчисло степеней свободы любого тела.

***Число степеней свободы*** – это число независимых переменных, полностью определяющих положение тела или системы тел в пространстве.

Молекулу одноатомного газа можно представить как материальную точку, имеющую три степени свободы поступательного движения (табл. 1.).

Молекулу двухатомного газа приближенно можно рассматривать, как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформированной связью. В этом случае, кроме трех степеней свободы поступательного движения, добавляются две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг оси, проходящей через центры обеих атомов не несет изменение координаты тела, поэтому лишено смысла. Таким образом двухатомный газ обладает пятью степенями свободы.

Трехатомная и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три от поступательного и три от вращательного движения.

<u>Таблица 1.</u>

*Число степеней свободы для идеального газа жестких молекул*

| Вид механического движения | **Число степеней свободы** | | |
|---|---|---|---|
| | ***Одноатомный газ*** | ***Двухатомный газ*** | ***Многоатомный газ*** |
| | | | |
| *Поступательное* | 3 | 3 | 3 |
| *Вращательное* | - | 2 | 3 |
| ***Всего*** | **3** | **5** | **6** |

В реальных молекулах нет жесткой связи между атомами в молекуле, поэтому необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения атомов внутри молекулы.

Независимо от общего числа степеней свободы молекулы, три степени свободы всегда связаны с поступательным движением. На каждую из них приходится третья часть средней кинетической энергии поступательного движения молекулы.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы определяется выражением:

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

поэтому, на каждую степень свободы поступательного движения приходится треть кинетической энергии, т.е $^1/_2\, kT$.

**Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы:** для статической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую ***поступательную*** и ***вращательную*** степень свободы в среднем приходится кинетическая энергия, равная $\frac{kT}{2}$, а на каждую ***колебательную*** степень свободы – энергия равная $kT$.

Энергия колебательных степеней свободы вдвое больше, так как колебательная система обладает равными по величине средними значениями как кинетической, так и потенциальной энергии.

Таким образом, ***средняя энергия молекулы***:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \tag{2.1}$$

где $i$ – сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы: $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}$.

## 2.2. Внутрення энергия термодинамической системы

***Внуртенняя энергия U*** – это энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т.д.) и энергия их взаимодействия.

К внутренней энергии не относится кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы по итношению к внешним полям. Внутреню энергию можно отнести к однозначным функциям термодинамического состояния системы, т.к. в каждом из своих возможных состояний система обладает вполне определенной внутренней энергией. Внутренняя энергия термодинамической системы не зависит от того, каким образом система перешла в данное стационарное состояние состояние. Поэтому изменение внутренней энергии системы определяется только разностью значений внутренней энергии системы в этих стационарных состояниях.

В идеальном газе молекулы не взаимодействуют между собой, поэтому из потенциальная энергия равна нулю. Тогда внутренняя энергия будет зависеть только от средней кинетической энергии молекул газа (2.1) и для одного моля идеального газа можно записать:

$$U_M = \langle \varepsilon \rangle N_A = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT \tag{2.2}$$

Для произвольной массы ***m*** газа внутренняя энергия будет соответственно:

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT \tag{2.3}$$

Следовательно изменений внутренней энергии газа произвольной массы будет зависеть только от температуры.

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{i}{2}\frac{m}{M}R\Delta T \qquad (2.4)$$

Если газ нагревается, то Δ***T>0*** и Δ***U>0***, если охлаждается, то Δ***T<0*** и Δ***U<0***.

## 2.3.Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики – это закон сохранения и превращения энергии в термодинамических процессах.

Рассмотрим замкнутую термодинамическую систему, в которой механическая энергия изменяться не будет, а будет изменяться только внутренняя энергия. Внутреннюю энергию системы можно изменить ***двумя способами***:

1. Совершая над системой работу, например сжимая газ в цилиндре при помощи поршня (рис. 2.1а);
2. Сообщая системе теплоту, например нагревая газ в герметичном сосуде (рис. 2.1б).

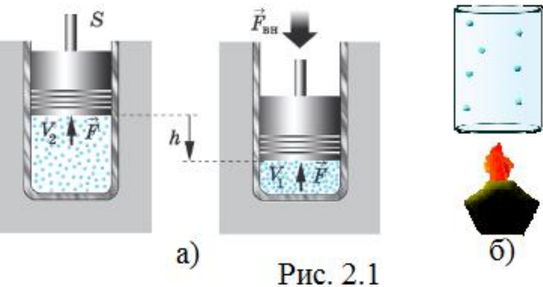


Рис. 2.1

При равновесном процессе перехода из начального состояния 1 в состояние 2 изменение внутренней энергии системы будет определяться количеством теплоты ***Q***, полученным или отданным системой и работой ***A***, совершенной системой против внешних сил (или работой внешних сил, совершенных над системой):

$$\pm\Delta U = \pm Q \pm A \qquad (2.5)$$

**Первое начало термодинамики:** теплота сообщаемая системе, расходуется на изменение еевнутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил.

В дифференциальной форме:

$$\partial Q = dU + \partial A, \qquad (2.6)$$

где ***dU*** (полный дифференциал) – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы, ***δA*** – элементарная работа, ***δQ*** – бесконечно малое количество теплоты. ***δA*** и ***δQ*** не являются полными дифференциалами.

Так как внутренняя энергия системы является однозначной функцией состояния системы, то при совершении системой произвольного процесса, в результате которого она возвращается в исходное состояние, полное изменение внутренней энергии системы будет равно нулю ($\oint \boldsymbol{dU} = \boldsymbol{0}$). Работа и теплота не являются функциями состояния системы.

Из выражения (2.5) следует, что работа ***δA***, количество теплоты ***δQ*** и изменнение внутренней энергии ***dU*** могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

К примеру, если к системе подводится теплота, то ***δQ>0***; если от системы отводится теплота, то ***δQ<0***. Единицы измерения теплоты в системе СИ: $[\boldsymbol{Q}] = [\text{Дж}]$**.** На практике иногда применяют калорию (***кал***): ***1 кал*** равна количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 г воды на 1ºС. ***1 кал ≈ 4,18 Дж, 1 Дж = 0,24 кал.***

Количество теплоты в термодинамике является ***функцией переноса***, т.е.:

1. Определяется начасльным и конечным состоянием системы;
2. Зависит от условий, в которых протекает процесс (от пути перехода 1→2).

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то Δ***U=0***, значит ***Q=A***.

**Другая формулировка первого начала термодинамики:** вечный двигатель первого рода (периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия) невозможен.

## 2.4. Работа газа при его расширении

Если находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде газ, расширяясь, передвигает поршень на расстояние ***dl*** (рис. 2.2), то производит над ним работу

$$\partial A = Fdl = pSdl \tag{2.7}$$

где ***S*** – площадь поршня.

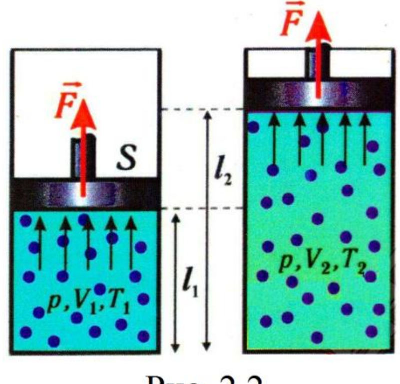


Рис. 2.2

Полная работа ***A***, которую совершает газ при изменении его объема от $V_1$ до $V_2$ будет6

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV. \tag{2.8}$$

Работа газа и работа внешнихсил связаны соотношением $A = -A_{\text{вн сил}}$.

Если система совершает работу над внешними телами, то ***A>0***, если же над системой внешние силы совершают работу, то ***A<0***.

Работа в термодинамике является ***функцией процесса*** т.е.:

1. Определяется начальным и конечным состоянием системы;
2. Зависит от условий, в которых протекает процесс (от пути перехода 1→2).

***Равновесные процессы*** – это процессы, которые состоят из последовательности равновесных состояний. При протекании таких процессов изменение термодинамических параметров за конечный промежуток времени бесконечно мало. Все реальные процессы ***неравновесны***, но при маленькой скорости процесса, можно приближенно считать реальные процессы равновесными.

Если равновесный процесс изобразить графически в координатах (***p,V***), то работу ***δA=pdV*** можно определить как площадь заштрихованной полоски, соответственно полная работа определяется как площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, кривой ***p=f(V)*** и прямыми $V_1$ и $V_2$ (рис. 2.3).

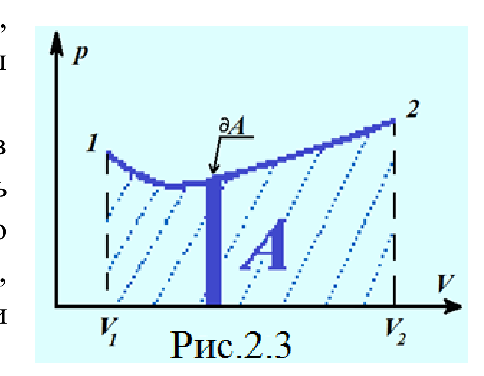


Рис.2.3

При нервновесных процессах значения параметров в разных частях системы различны и не существует (***p,V***) – точек, которые бы характеризовали состояние всей системы, поэтому графически изобразить неравновесный процесс невозможно.

## 2.5. Теплоемкость

***Удельная теплоемкость вещества*** **с** – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{mdT}. \tag{2.9}$$

Единица удельной теплоемкости – Дж/(кг·К).

***Молярная теплоемкость*** $C_м$ – величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моль вещества на 1 К:

$$C_M = \frac{\delta Q}{\nu dT} \qquad (2.10)$$

Единица молярной теплоемкости – Дж/(моль·К).

Выражение (2.11) описывает связь между молярной и удельной теплоемкостью:

$$C_M = c \cdot M \qquad (2.11)$$

Различают теплоемкости (удельную и молярную) при *постоянном объеме* ($\boldsymbol{c_V}$ и $\boldsymbol{C_V}$ ) и при *постоянном давлении* ($\boldsymbol{c_p}$ и $\boldsymbol{C_p}$ ), если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживаются постоянными.

**Молярная теплоемкость при посстоянном объеме.**

Из первого начала термодинамики $\boldsymbol{\delta Q = dU + \delta A}$**,** то с учетом (2.4), (2.8) и (2.10) для 1 моль газа получим:

$$C_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2}R \qquad (2.12)$$

При выводе учли, что при постоянном объеме, работа, совершаемая газом равна 0, и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличесние его внутренней энергии.

Таким образом, молярная теплоемкость при постоянном объеме $\boldsymbol{C_V}$ равна изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К.

**Молярная теплоемкость при постоянном давлении.**

Если газ нагревается при ***p=const***, то

$$C_p = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT} = C_V + R \qquad (2.13)$$

или

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R \qquad (2.14)$$

Учтен тот факт, что $\boldsymbol{\frac{dU}{dT}}$ не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от $\boldsymbol{p}$ ни от $\boldsymbol{V}$, а определяется только температурой) и всегда равна $\boldsymbol{C_V}$**.** Выражение (2.13) называется ***уравнение Майера.***

Из уравнения Майера видно, что  всегда больше  на величину универсальной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа при постоянном давлении требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа.

При рассмоторенииитермодинамических процессов важную роль играет величина

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} \qquad (2.15)$$

Величина γ называется ***коэффициент Пуассона.***

Из выражений (2.12) и (2.14) для молярных теплоемкостей видно, что они определяются числом степеней свободы, и не зависят от температуры. Однако, это справедливо в широком интервале температур лишь для ***одноатомных газов.*** У двухатомных молекул число степеней свободы $\boldsymbol{i}$ зависит от температуры. Молекула двухатомного газа имеет три поступательных, две вращательных и одну колебательную степень свободы. Следовательно молярная теплоемкость $\boldsymbol{C_V = \frac{7}{2}R}$**.** Экспериментальная температурная зависимость молярной теплоемкости $\boldsymbol{C_V}$ водорода имеет вид, представленный на рисунке 2.4. Из графика видно, что при низких температурах ($T_1 \sim 50K$) $\boldsymbol{C_V = \frac{3}{2}R}$**,** при

комнаной температуре $(T_2 \sim 300K)$ – $\boldsymbol{C_V = \frac{5}{2}R}$, при высоких температурах $(T_3 \sim 6000K)$ – $\boldsymbol{C_V = \frac{7}{2}R}$.

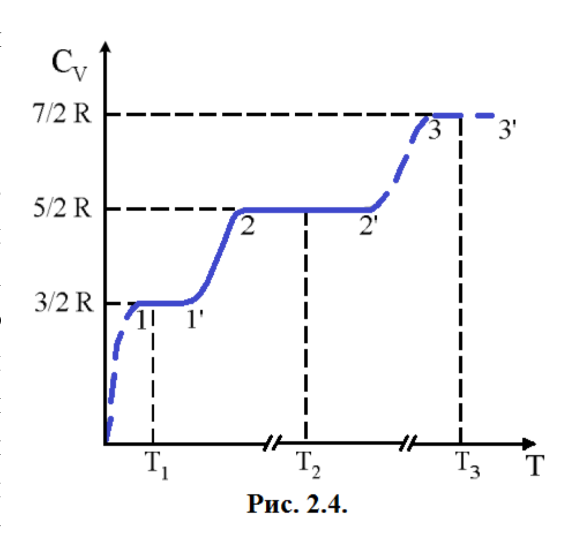


**Рис. 2.4.**

Для объяснения этого факта, можно предположить, что при низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул, при комнатной температуре добавляется их вращение, а при высоких температурах и колебания. Таким образом, необходимо учитываать квантование энергии вращения и энергии колебания (возможны не любые вращательные и колебательные энергии, а лишь определенный дискретный ряд значений энергии). Если энергии теплового движения недостаточно, например, для возбуждения колебаний, то эти колебания не вносят своего вклада в теплоемкость, знасит соответствующая степень свободы «замораживается» и к ней не применим закон равнораспределения энергии.

## 2.6. Применение I начала термодинамики к изопроцессам

Рассмотрим равновесные процессы, происходящие с термодинамическими системами, при которых один из основных параметров состояния сохраняется постоянным.

***Изохорный процесс*** $\boldsymbol{(V = const)}$. Диаграмма этого процесса – ***изохора*** – в координатах (***p, V***) изображается прямой, параллельной оси ординат (ось ***p***) (рис. 2.5). Процесс 2-1 – изохорный нагрев, процесс 2-3 – изохорное охлаждение. При изохорном процессе газ не совершает работу над внешними телами и вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличесние его внутренней энергии. Учитывая, что $\boldsymbol{dU_M = C_V dT}$, то для произвольной массы газа можно записать

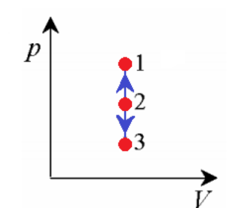


Рис. **2.5**

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_V dT, \qquad (2.16)$$

***Изобарный процесс (p=const).*** Диаграмма этого процесса – ***изобара*** – в координатах (***p, V***) изображается прямой параллельной оси абсцисс (ось ***V***) (рис. 2.6). При изобарном процессе работа газа при увеличении объема до равна:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \qquad (2.17)$$

и определяется площадью заштрихованного прямоугольника. Используя уравнение Клайпероно-Менделеева (1.13), при ***p=const*** получим

Рис. **2.6**

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}(T_2 - T_1) \qquad (2.18)$$

Из соотношения (2.18) вытекает *физический смысл универсальной газовой постоянной*: ***R*** численно равна работе изобарного расширения 1 моля идеального газа при нагревании его на 1 К.

По I началу термодинамики количество теплоты равно

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{i}{2}\nu RdT + \nu RdT = \frac{i+2}{2}\nu RdT = \frac{i+2}{2}\delta A \qquad (2.19)$$

***Изотермический процесс (T=const).*** Диаграмма этого процесса – ***изотерма*** – в координатах (***p, V***) представляет собой гиперболу (рис. 2.7). Изотермический процесс описывается законом Бойля-Мариотта (***pV=const***). Работа изотермического расширения газа:

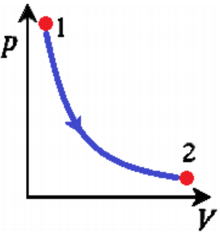


Рис. 2.7.

$$A=\int_{V_1}^{V_2} pdV=\int_{V_1}^{V_2}\frac{m}{M}RT\frac{dV}{V}=\frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{m}{M}RT\ln\frac{p_1}{p_2}. \qquad (2.20)$$

Так как при ***T=const*** внутрення энергия идеального газа не изменяется, то из первого начала ткрмодинамики следует, что ***δQ=δA*** , то есть все количество теплоты, сообщаемое газу расходуется на совершение им работы против внешних сил. Поэтому, для того, чтобы при расширении газа температура не понижалась, к газу в течении изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, которое по величине эквивалентно внешней работе расширения.

## 2.7. Адиабатический и политропный процессы

***Адиабатическим*** называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между систамой и окружающей средой (***δQ=0***). К ним относятся все быстропротекающие процессы (теплообмен не успевает совершиться), например, распространение звука в среде, циклы расширения и сжатия в двигателях внутреннего сгорания, в холодильных установках и т.д.

Из первого начала термодинамики следует, что при адиабатическом процессе ***δA=-dU***, т.е работа газа совершается за счет уменьшения внутренней энергии. Используя $\boldsymbol{\delta A = pdV}$ и $\boldsymbol{dU=\frac{m}{M}C_V dT}$, получим

$$pdV=-\frac{m}{M}C_V dT$$

С другой стороны, из уравнения $\boldsymbol{pV=\frac{m}{M}RT}$ следует

$$pdV+Vdp=\frac{m}{M}RdT$$

Разделив второе выражение получим:

$$\frac{pdV+Vdp}{pdV}=-\frac{R}{C_V},\quad 1+\frac{Vdp}{pdV}=-\frac{C_p-C_V}{C_V}=-\gamma+1 \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p}=-\gamma\frac{dV}{V}. \qquad (2.21)$$

Проинтегрировав уравнение (2.21), получим ***уравнение Пуассона:***

$$pV^{\gamma}=const \qquad (2.22)$$

Используя уравнение Клайперона-Менделеева, получим:

$$TV^{\gamma-1}=const,\quad T^{\gamma}p^{1-\gamma}=const,\quad \text{где}\quad \gamma=\frac{C_p}{C_V} \qquad (2.23)$$

Диаграмма адибатического процесса – ***адиабата*** – в координатах (***p, V***) изображается гиперболой (рис. 2.8). Адиабата (***pV^γ=const***) более крута, чем изотерма (***pV=const***). Это объясняется тем, что при адиабатическом сжатии 1-3 увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, но и повышением температуры.

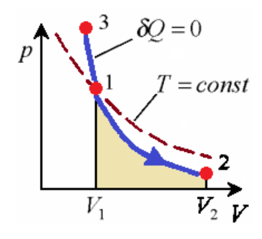


Рис. 2.8.

В адиабатическом процессе $\boldsymbol{\delta A=-dU}$, поэтому $\boldsymbol{\delta A=-\frac{m}{M}C_V dT}$. Если газ адиабатически расширяется от объема $\boldsymbol{V_1}$ до $\boldsymbol{V_2}$, то его температура уменьшается от $\boldsymbol{T_1}$ до $\boldsymbol{T_2}$ и работа расширения идеального газа будет:

$$A = -\frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2) \qquad (2.24)$$

Работа адиабатического расширения 1-2 меньше, чем при изотермическом процессе. Это связано с тем, что при адиабатическом расширании происходит охлаждение газа, а при изотермическом температура поддерживается постоянной за счет притока тепла извне.

***Политропические процессы.*** Процесс, в котором теплоемкость остается постоянной (***C=const***) называется ***политропическим.*** Рассмотренные выше изопроцессы и адиабатический процесс – это частные случаи политропного процесса. ***Уравнение политропы:***

$$pV^n = const \qquad (2.25)$$

где коэффициент $n = \frac{C - C_p}{C - C_V}$ называется ***показателем политропы.***

## 2.8. Круговой процесс. КПД кругового процесса. Обратимые и необратимые процессы

***Круговым процессом (циклом)*** называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное состояние. На (***p,V***)-диаграмме цикл изображается замкнутой кривой, где участок 1-2 соответствует расширению, а 2-1 – сжатию газа (рис. 2.9).

*Работа расширения* (площадь фигуры $1a2V_2V_11$) положительна: $\boldsymbol{dV > 0}$ (рис. 2.9А). Р*абота сжатия* (площадь фигуры $2b1V_2V_12$) отрицательна: $\boldsymbol{dV < 0}$ (рис. 2.9Б).

***Работа за цикл*** определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Таким образом, работа – это функция не только состояния термодинамической системы, но и вида процесса, который происходит. Поэтому работа не является однозначной функцией состояния (такой, как внутренняя энергия). Из первого начала термодинамики следует, что теплота, так же как и работа, является функцией процесса, который происходит с системой.

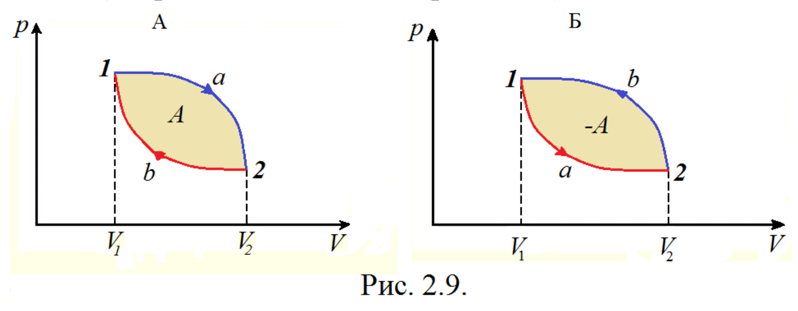



Рис. 2.9.

Цикл называется ***прямым,*** если за цикл совершается положительная работа (цикл протекает по часовой стрелке – рис. 2.9А).

Цикл называется ***обратным***, если за цикл совершается отрицательная работа (цикл протекает против часовой стрелки – рис. 2.9Б).

Прямой цикл используется в тепловых двигателях (совершают работу засчет полученной извне теплоты). Обратный цикл используется в холодильных машинах (за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой).

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, следовательно полное изменение внутренней энергии равно нулю. Поэтому работа, совершаемая за цикл, равна количеству теплоты, полученной извне. Если в ходе кругового процесса система не только получает количество теплоты $\boldsymbol{Q_1}$, но и теряет количество теплоты $\boldsymbol{Q_2}$, то $\boldsymbol{Q = Q_1 - Q_2}$.

***Термический КПД для кругового процесса*** – это величина, равная отношению работы, совершенной системой, к количеству теплоты, полученному в этом цикле системой:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \qquad (2.26)$$

**Обратимый и необратимый процессы.** Термодинамический процесс называется ***обратимым***, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении. Причем, если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является ***необратимым.*** Реальные процессы необратимы, в них всегда происходит потеря энергии (диспансия), из-за трения, теплопроводности и т.д. Обратимые процессы – физическая модель – это идеализация реальных процессов. Однако их рассмотрение очень важно, во-первых, многие процессы в природе и технике практически обратимы, во-вторых, обратимые процессы имеют максимальный КПД, что позволяет изучать пути повышения КПД реальных тепловых двигателей.

## 2.9. Энтропия

**Термодинамическое толкование энтропии.** Количество тепла $\boldsymbol{\delta Q}$, которое должно быть доставлено системе или отнято у нее при переходе из одного состояния в другое, не определяется однозначно начальным и конечным состояниями, но существенно зависит от способа осуществления этого перехода ($\boldsymbol{\delta Q}$ не является функцией состояния системы). Однако, ***приведенное количество теплоты*** – отношение теплоты $\boldsymbol{\delta Q}$ к температуре $\boldsymbol{T}$ системы при бесконечно малых изменениях состояния системы – есть функция состояния системы. Для любого обратимого кругового процесса можно записать:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \qquad (2.27)$$

Следовательно, подынтегральное выражение есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только начальным и конечным состояниями системы и не зависит от пути, которым система пришла в это состояние.

***Энтропией*** $\boldsymbol{S}$ называется функция состояния системы, дифференциалом которой является $\boldsymbol{dS = \frac{\delta Q}{T}}$. Понятие энтропия введено Клаузисом в 1865 г.

Таким образом, первое начало термодинамики $\boldsymbol{\delta Q = dU + \delta A}$ можно записать в виде $\boldsymbol{TdS = dU + \delta A}$, откуда

$$\delta A = TdS - dU = d(TS) - SdT - dU = -d(U - TS) - SdT = -F - SdT \qquad (2.28)$$

Функция $\boldsymbol{F = U - TS}$ является функцией состояния системы и называется ***энергией Гельмгольца*** или ***свободной энергией***.

В замкнутой системе для обратимых процессов $\boldsymbol{\Delta S = 0;}$ для необратимых процессов $\boldsymbol{\Delta S > 0}$.

Энтропия замкнутой системы может либо *возрастать* (в случае необратимых процессов) либо *оставаться постоянной* (в случае обратимых процессов). Два енравенства можно представить в виде ***неравенства Клаузиуса***:

$$\Delta S \geq 0$$

Поскольку $\boldsymbol{dS}$ и $\boldsymbol{\delta Q}$ имеют один и тотже знак, то по характеру изменения энтропии можно судить о направлении процесса теплообмена. При нагревании тела $\boldsymbol{\delta Q} > 0$ и его энтропия возрастает $\boldsymbol{dS} > 0$, при охлаждении $\boldsymbol{\delta Q} < 0$ и энтропия убывает $\boldsymbol{dS} < 0$.

***Изоэнтропийным*** называется процесс, протекающий при постоянной энтропии (***S=const***). В обратимом адиабатическом процессе $\boldsymbol{\delta Q = TdS = 0}$, так что $\boldsymbol{dS = 0}$ и ***S=const***, поэтому *адиабатический процесс является изоэнтропийным.* Рассмотрим для примера идеальный газ, который совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2. Тогда изменение его энтропии

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T} \tag{2.29}$$

Формула (2.29) определяет энтропию с точностью до постоянной, т.е. физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий.

Учитывая, что $dU = \frac{m}{M} C_V dT,\ \delta A = pdV = \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V}$, получим:

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M}\left( C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1} \right) \tag{2.30}$$

С учетом соотношений $R = C_p - C_V$ и $\frac{T_2 V_1}{T_1 V_2} = \frac{p_2}{p_1}$ изменение энтропии можно представить в виде

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M}\left( C_V \ln\frac{p_2}{p_1} + C_p \ln\frac{V_2}{V_1} \right) \tag{2.31}$$

В таблице представлено изменение энтропии в различных процессах.

| *изохорный* | *изобарический* | *изотермический* | *адиабатический* |
|---|---|---|---|
| ***(V=const)*** | ***(p=const)*** | ***(T=const)*** | ***(S=const)*** |
| $\boldsymbol{\Delta S = \frac{m}{M} C_V ln \frac{T_2}{T_1}}$ | $\boldsymbol{\Delta S = \frac{m}{M} C_p ln \frac{V_2}{V_1}}$ | $\boldsymbol{\Delta S = \frac{m}{M} R ln \frac{V_2}{V_1}}$ | $\boldsymbol{\Delta S = 0}$ |

**Статистическое толкование энтропии.** Физический смысл энтропии был дополнен исследованиями Л.Больцмана. он полагал, что можно вполне точно задать состояние системы молекул (частиц), указав координаты и скорости всех входящих в нее молекул. Каждое макроскопическое состояние системы может быть осуществлено множеством различных способов расположения частиц. Число таких способов $\boldsymbol{W}$ называется ***статистическим весом*** (***термодинамической вероятностью***) данного макроскопческого состояния. Чем больше $\boldsymbol{W}$, тем вероятнее пребываение системы в данном состоянии.

***Термодинамическая вероятность*** *W* ***состояния тела или системы*** – это число способов, которыми может быть реализовано данное конкретное термодинамическое состояние (***макросостояние***). Иначе говоря, это число всевозможных микрораспределений частиц по координатам и скоростям (***микросостояний***), которыми может быть осуществлено данное макросостояние.

Энтропия системы определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние (*формула Больцмана*):

$$S = k \ln W \tag{2.32}$$

где $\boldsymbol{k}$ – постоянная Больцмана.

***Энтропия является мерой неупорядоченности системы*** – чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. Стремление

энтропии к максимуму означает, что система стремится к переходу в наиболее вероятное состояние. Из статистического определения следует, что энтропия – мера беспорядка в системе частиц. Чем больше порядок, тем ниже энтропия.

Для энтропии характерен **принцип возрастания энтропии:** *все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии.* В замкнутой системе все процессы идут ***в направлении от менее вероятных*** состояний к ***более вероятным***, до тех пор, пока вероятность состояния не станет максимальной. В состоянии равновесия – наиболее вероятном состоянии – число микросостояний максимально, максимальна и энтропия. Полный порядок в системе тождественных частиц может быть осуществлен только одним способом: $\boldsymbol{T = 0}$℃ $\boldsymbol{S \to 0}$.

Основные свойства энтропии:

1. Энтропия является функцией состояния системы.
2. Энтропия замкнутой системы, претерпевшей обратимый процесс, остается постоянной.
3. В ходе необратимого процесса энтропия замкнутой системы возрастает, и ее максимальное значение соответтствует равновесию системы.
4. Возрастание энтропии системы при необратимом процессе означает, что система переходит из менее вероятного состояния в более вероятное.

## 2.10. Второе и третье начало термодинамики

Первое начало термодинамики отражает закон сохранения и превращения энергии, но не позволяет установить направление протекающих термодинамических процессов. Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов, указывая, какие процессы в природе возможны, а какие – нет.

Второе начало термодинамики – ***закон возрастания энтропии*** замкнутых систем при необратимых процессах:

любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.

Отметим, что это утверждение имеет место в системах, состоящих из очень большого числа частиц. В системах с малым числом частиц могут наблюдаться флуктуации, т.е. энтропия и термодинамическая вероятность могут и убывать и оставаться постоянными. Также существенным является условие замкнутости системы.

Существуют еще две формулировки второго начала термодинамики, эксивалентных закону возрастания энтропии:

**1. по Кельвину**: ***невозможен*** круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу;

**2. по Клаузису**: ***невозможен*** круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к телу более нагретому.

В середине IXX в. возникла проблема так называемой тепловой смерти Вселенной. Рассматривая Вселенную как замкнутую систему и применяя второе начало термодинамики к ней, Клаузис утверждал, что энтропия всей Вселенной должна достигнуть своего максимума. Это означает, что все формы движения должны перейти в тепловую. Переход теплоты от горячих тел к холодным приведет к тому, что температура всех тел выровняется и наступит тепловое равновесие – тепловая смерть Вселенной. Ошибочность вывода

очевидна – бессмысленно применять второе начало термодинамики к незамкнутым системам – к такой безграничной и бесконечно развивающейся системе, какой является Вселенная.

**Третье начало термодинамики.** Третье начало термодинамики – ***теорема Нернста-Планка*** – постулирует поведение термодинамических систем при нуле Кельвина (абсолютном нуле):

энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина:

$$\lim_{T \to 0} S = 0$$

Теплоемкости $C_V$ и $C_p$ при $0^oK$ равны нулю, поскольку:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad C = \frac{\delta Q}{dT}, \quad S(p = const, T) = \int_0^T \frac{C_p(T)dT}{T}, \quad S(V = const, T) = \int_0^T \frac{C_V(T)dT}{T} \qquad (2.33)$$

Действительно, если бы теплоемкость не стремилась к нулю, то подынтегральная функция при $T \to 0$ неограниченно возрастала бы, вследствие чего интеграл был бы расходящимся (т.е. обращался бы в бесконечность).

## 2.11. Тепловые двигатели и холодильные машины

Из второго начала термодинамики по Кельвину следует, что вечный двигатель II рода – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты невозможен. Рассмотрим работу теплового двигателя, принцип действия которого приведен на рис. 2.10. Всякий двигатель представляет собой систему, совершающую многократно некий цикл.

***Теповой двигатель*** – это периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет полученной извне теплоты. Работа в тепловых двигателях производится в процессе расширения некоторого вещества, которое называется *рабочим телом*. (3 на рис. 2.10).

Рис. 2.10.

***Рабочее тело*** – это тело, совершающее круговой процесс и обменивающееся энергией с другими телами. В качестве рабочего тела обычно используются газообразные вещества (пары бензина, воздух, водяной пар). Общее свойство всех круговых процессов состоит в том, что их невозможно провести, приводя рабочее тело в тепловой контакт только с одним тепловым резервуаром. Их надо, по крайней мере, два. При работе двигателя, рабочее тело получает (или отдает) тепловую энергию в процессе теплообмена с телами, которые имеют больший запас энергии. Эти тела называют ***тепловами резервуарами (термостатами)***. Термостат с более высокой температурой $T_1$ называется *нагревателем* (1 на рис 2.10), а с более низкой $T_2$ – *холодильником* $T_2 < T_1$ (2 на рис. 2.10).

***Принцип работы теплового двигателя:*** от нагревателя с более высокой температурой $T_1$, за цикл отнимается количество теплоты $Q_1$, а холодильнику с более низкой тепмературой $T_2$, за цикл передается количество теплоты $Q_2$, при этом за цикл совершается работа $A = Q_1 - Q_2$. Процесс теплопередачи и преобразования полученного тепла в работу периодически повторяется. Для этого рабочее тело должно совершать круговой процесс или термодинамически цикл, при котором периодически восстанавливается исходное состояние: $\Delta U = 0$.

Итак, совершая круговой процесс, рабочее тело получает от нагревателя $\boldsymbol{Q_1} > 0$ при расширении; отдает холодильнику $\boldsymbol{Q_2} < 0$ при сжатии. Полное количество теплоты $\boldsymbol{Q}$ за цикл: $\boldsymbol{Q = Q_1 - Q_2}$. Согласно началу термодинамики, $\Delta \boldsymbol{U = Q - A = 0}, \Rightarrow \boldsymbol{A = Q = Q_1 - Q_2}$.

Чем полнее превращает тепловая машина полученное извне тепло $\boldsymbol{Q_1}$ в полезную работу $\boldsymbol{A}$, тем эта машина «выгоднее». Поэтому тепловую машину принято характеризовать коэффициентом полезного действия (КПД). ***Термический КПД двигателя:***

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{2.34}$$

Чтобы КПД был равен 1, необходимо, чтобы $\boldsymbol{Q_2 = 0}$**,** а это запрещено вторым началом термодинамики. КПД показывает, какая часть тепловой энергии, полученной рабочим телом от нагревателя, превратилась в работу. Остальная часть $(\boldsymbol{1 - \eta})$ была «бесполезно» передана холодильнику.

Реальные тепловые машины из-за трения и неизбежных тепловых потерь имеют $\boldsymbol{\eta} < 40\%$, поршневая паровая машина $\sim\boldsymbol{20}\%$, паровая турбина $\sim\boldsymbol{30}\%$.

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в ***холодильной машине***: от термостата с более низкой температурой $\boldsymbol{T_2}$ за цикл отнимается количесство теплоты $\boldsymbol{Q_2}$ и отдается термостату с более высокой температурой $\boldsymbol{T_1} > \boldsymbol{T_2}$. Количество теплоты $\boldsymbol{Q_1}$, отданное системой термостату $\boldsymbol{T_1}$, больше количества теплоты $\boldsymbol{Q_2}$, полученной от термостата $\boldsymbol{T_2}$ на величину работы , совершенной над системой.

Эффективность холодильной машины характеризует холодильный коэффициент $\boldsymbol{\eta'}$ - отношение отнятой от термостата с более низкой температурой количсетва теплоты $\boldsymbol{Q_2}$ к работе $\boldsymbol{A}'$, которая затрачивается на приведение холодильной машины в действие:

$$\eta' = \frac{Q_2}{A'} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \tag{2.35}$$

## 2.12. Цикл Карно. КПД цикла Карно

На основе второго начала термодинамики французский инженер С.Карно вывел и доказал теорему:

из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей $\boldsymbol{T_1}$ и холодильников $\boldsymbol{T_2}$ наибольшим КПД обладают ***обратимые машины***. При этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей и холодильников, равны друг другу и ***не зависят от природы рабочего тела***, а определяются только температурами нагревателя и холодильника.

***Цикл Карно*** – наиболее экономичный обратимый круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат.

Рассмитрим прямой цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем. Последовательные термодинамические процессы в цикле Карно (рис. 2.11.):

**A-B** – изотерма, **B-C** – адиабата,

**C-D** – изотерма, **D-A** – адиабата.

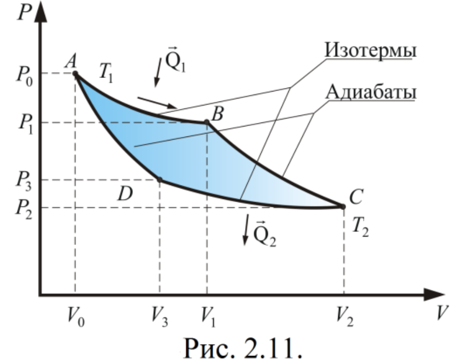


Рис. 2.11.

Для указанных процессов, используя первое начало термодинамики, можно найти работу газа:

изотермическое расширение **A-B** $$A_{AB}=\frac{m}{M}RT_1 ln\frac{V_1}{V_0}=Q_1$$
$T=const;\quad V_1>V_0$

адиабатическое расширение **B-C** $$A_{BC}=-\frac{m}{M}C_V(T_2-T_1)$$
$\delta Q=0;\quad T_2<T_1$

изотермическое сжатие **C-D** $$A_{CD}=\frac{m}{M}RT_2 ln\frac{V_3}{V_2}=-Q_2$$
$T=const;\quad V_3<V_2$

адиабатическое сжатие **D-A** $$A_{DA}=-\frac{m}{M}C_V(T_1-T_2)=-A_{BC}$$
$\delta Q=0;\quad T_1>T_2$

Тогда работа, совершаемая в результате кругового процесса,

$$A=A_{AB}+A_{BC}+A_{CD}+A_{DA}=Q_1+A_{BC}-Q_2-A_{BC}=Q_1-Q_2 \qquad (2.36)$$

Термический КПД цикла Карно:

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1} \qquad (2.37)$$

Применяя для адиабат уравнения адиабатного процесса, получим:

$$T_1V_1^{\gamma-1}=T_2V_2^{\gamma-1},\quad T_1V_0^{\gamma-1}=T_2V_3^{\gamma-1},\quad \text{откуда}\ \frac{V_1}{V_0}=\frac{V_2}{V_3} \qquad (2.38)$$

Используя это, термический КПД цикла Карно:

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_1}{V_0}-\frac{m}{M}RT_2\ln\frac{V_2}{V_3}}{\frac{m}{M}RT_1\ln\frac{V_1}{V_0}}=\frac{T_1-T_2}{T_1} \qquad (2.39)$$

т.е. для цикла Карно КПД действительно определяется только температурами нагревателя и холодильника. КПД цикла Карно является максимальным КПД из всех возможных циклов, осуществляемых в данных температурных интервалах $T_1$ и $T_2$. Для повышения КПД необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника. КПД любого реального теплового двигателя из-за трения и неизбежных тепловых потерь гораздо меньше, полученного для цикла Карно.

В двигателях, применяемых в технике, используются различные круговые процессы. Например, цикл ***карбюраторного двигателя внутреннего сгорания*** состоит из следующих процессов: *двух изохор и двух адиабат*. А цикл ***дизельного двигателя внутреннего сгорания*** включает *две адиабаты, изобару и изохору*. Реальный КПД у карбюраторного двигателя $\sim 30\%$, дизельного двигателя $\sim 40\%$.

**Обратный цикл Карно** положен в основу действия тепловых насосов. В отличие от холодильных машин тепловые насосы должны как можно больше тепловой энергии отдавать горячему телу, например системе отопления. Часть этой энергии отнимается от окружающей среды с более низкой температурой, а часть получается за счет механической работы, производимой, например, компрессором.

Теорема Карно послужила основанием для установления термодинамической шкалы температур. Действительно, из выражения (2.39), получим:

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{Q_2}{Q_1} \qquad (2.40)$$

т.е. для сравнения температур $T_1$ и $T_2$ двух тел необходимо осуществить обратимый цикл Карно. Из равенства (2.40) видно, что отношение температур тел равно отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно,

химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая термодинамическая шкала не связана со свойствами какого-то определенного термодинамического тела. Практически сравнивать температуры таким образом трудно, т.к. реальные термодинамические процессы необратимы.

# Глава 3. Реальные газы, жидкости и твердые тела

## 3.1. Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия

При рассмотрении модели идеального газа не учитывалось взаимодействие между молекулами. Такая модель хорошо описывает поведение разряженных реальных газов при достаточно высоких температурах и низких давлениях. Повышение давления приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами, поэтому при рассмотрении реальных газов учитывают *собственный объем молекулы* и *силы межмолекулярного взаимодействия*.

***Силы межмолекулярного взаимодействия*** – короткоживущие, проявляются на расстояниях ***менее*** $\boldsymbol{10^{-9}}$***м***. силс взаимодействия между молекулами – это равнодействующая сил притяжения и отталкивания. Силы притяжения $\boldsymbol{F}_п < 0$ – преобладают на больших расстояниях ($\boldsymbol{r} > \boldsymbol{r_o}$); силы отталкивания $\boldsymbol{F}_о > 0$ – доминируют на малых расстояиях ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{r_o}$). На расстоянии $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_o}$ эти силы уравновешивают друг друга и равнодействующая сил $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ (рис. 3.1). На расстояниях $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{10^{-9}}$**м** межмолекулярные силы взаимодействия практически отсутствуют ($\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{0}$).

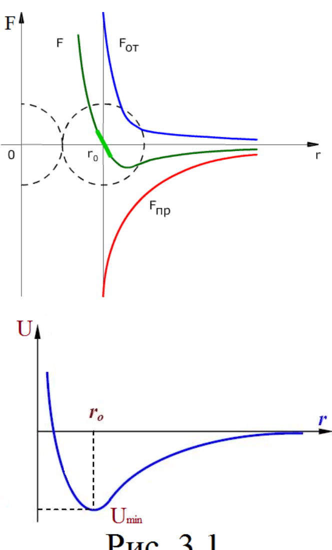


Рис. 3.1.

Таким образом, расстояние $\boldsymbol{r_o}$ - это равновесное расстояния между молекулами, на котором бы они находились в отсутствие теплового движения. Условно расстояние $\boldsymbol{r_o}$ принимают за диаметр молекулы.

Потенциальная энергия взаимодействия молекул $\boldsymbol{U}_п$ ***минимальна*** в состоянии устойчивого равновесия, при $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_o}$. Поведение потенциальной кривой объясняется следующим образом. Элементарная работа $\boldsymbol{\delta A}$ силы $\boldsymbol{F}$ при увеличении расстояния между молекулами на $\boldsymbol{dr}$ совершается за счет уменьшения потенциальной энергии молекул:

$$\delta A = Fdr = -dU_n \qquad (3.1)$$

Если молекулы находятся друг от друга на расстоянии $\boldsymbol{r} \to \infty$, то $\boldsymbol{F} \to \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{U} \to \boldsymbol{0}$. При сближении молекул между ними появляются силы притяжения $\boldsymbol{F}_п < 0$, которые совершают положительную работу. Тогда, согласно формуле (3.1), потенциальная энергия взаимодействия *уменьшается*, достигая минимума при $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_o}$. При $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{r_o}$ с уменьшением расстояния силы отталкивания резко возрастают и совершаемая работа отрицательна. Потенциальная энергия начинает также резко *возрастать* и становится *положительной*. Таким образом, система из двух взаимодействубщих молекул обладает ***минимальной*** потенциальной энергией в состоянии устойчивого равновесия при $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_o}$.

Сотношение между $\boldsymbol{U_{min}}$ и $\boldsymbol{kT}$ является критерием различных агрегатных состояний. Величина $\boldsymbol{U_{min}}$ определяет работу, которую надо совершить против сил притяжения, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии. Величина $\boldsymbol{kT}$ определяет удвоенную среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы теплового движения молекул.

1. При $U_{min} \gg kT$ вещество находится в твердом состоянии, т.к. тепловой энергии недостаточно, чтобы «оторвать» молекулы друг от друга. Молекулы выстроены в определенном порядке, образуя кристаллическую решетку (твердые тела сохраняют форму (рис. 3.2)). Молекулы совершают колебания вблизи центров равновесия, не перемещаясь по всему объему. Для твердых тел $r < r_o$, преобладают силы отталкивания $F_о > F_п$.

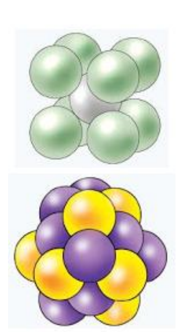


Рис. 3.2

2. При $U_{min} \sim kT$ вещество находится в жидком состоянии, т.к. в результате теплового движения молекулы пермещаются в пространстве, обменивияст местами, но не расходясь на расстояния, превышающие $r_o$ (рис. 3.3). Молекулы колеблются около положений равновесия, а сами положения равновесия преиодически меняют свое расположение и могут перемещаться по всему объему жидкости. Этим объясняетсятекучесть жидкостей. Для жидкостей $r \approx r_o$ и $F_о \approx F_п$.



Рис. 3.3

3. При $U_{min} \ll kT$ вещество находится в газообразном состоянии, т.к. тепловое движение молекул препятствует соединению молекул. Молекулы свободно движутся с большими скоростями по различным направлениям (рис. 3.4). слабое взаимодействие между молекулами объясняет способность газов расширяться и заполнять весь объем сосуда. Для газов $r > r_o$, преобладают силы притяжения $F_п > F_о$. При $r \to \infty$, $F \to 0$, взаимодействие стремится к нулю и газ становится *идеальным*.

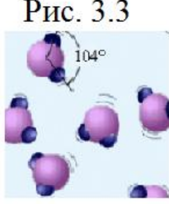



Рис. 3.4

## 3.2. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Ван-дер-Ваальс внес в уравнение состояния идеального газа ряд поправок, которые учитывали собственный объем молекул и силы молекулярного взаимодействия. При учете собственного объема молекул, фактический объем моля реального газа будет:

$$V_M - b \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{b}$ – объем, занимаемый самими молекулами.

Две молекулы радиуса  не могут сблизиться на расстояние меньше , следовательно, для центра двух молекул недоступен сферический объем радиуса  (рис. 3.5). этот объем в восемь раз больше объема одной молекулы и в расчете на одну молекулу равен учетверенному объему молекулы.

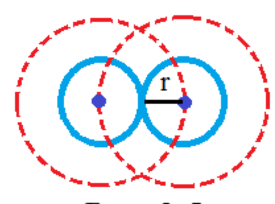



Рис. 3.5

Учет сил межмолекулярного притяжения осуществляется введением дополнительного давления на газ, которое называют *внутренним давлением*:

$$p' = \frac{a}{V_M^2} \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{a}$ – постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного взаимодействия, $\boldsymbol{V_M}$ – молярный объем.

Поправки $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – постоянные для каждого газа величины, определяемые опытным путем. Введя эти поправки получим **уравнение Ван-дер-Ваальса** для моля газа – ***уравнение состояния реальных газов***:

$$\left(p + \frac{a}{V_M^2}\right) \cdot (V_M - b) = RT \tag{3.4}$$

Учитывая, что $\boldsymbol{V = \nu V_M}$ получим уравнение Ван-дер-Ваальса для произвольной массы газа:

$$\left(p+\nu^2\frac{a}{V^2}\right)\cdot(V-\nu b)=RT \qquad (3.5)$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса гораздо лучше согласуется с экспериментом, чем уравнение состояния идеального газа. При $\boldsymbol{V} \to \infty$, давление уменьшается, газ по своим свойствам стремиться к идеальному.

## 3.3. Изотермы реальных газов. (Изотермы Ван-дер-Ваальса)

Изотерма реального газа представляет собой зависимость давления газа от молярного объема при постоянной температуре. На рис. 3.6. показаны три изотермы Ван-дер-Ваальса. При высоких температурах $(\boldsymbol{T} > \boldsymbol{T_K})$ изотерма реального газа отличается от изотермы идеального газа только некоторым искажением формы.

При некоторой температуре $\boldsymbol{T_K}$ – ***критической температуре*** – на изотерме появляется точка перегиба ***К*** – ***критическая точка***. Соответствующие этой точке объем $\boldsymbol{V_K}$ и давление $\boldsymbol{p_K}$ называются *критическими*. Изотерма при $\boldsymbol{T_K}$ называется *критической изотермой*. Состояние с критическими параметрами $(\boldsymbol{T_K}, \boldsymbol{V_K}, \boldsymbol{p_K})$ называется ***критическим состоянием***. Критические параметры определяются следующими соотношениями:

$$V_K = 3b, \quad p_K = \frac{a}{(27b)^2}, \quad T_K = \frac{8a}{27Rb} \qquad (3.6)$$

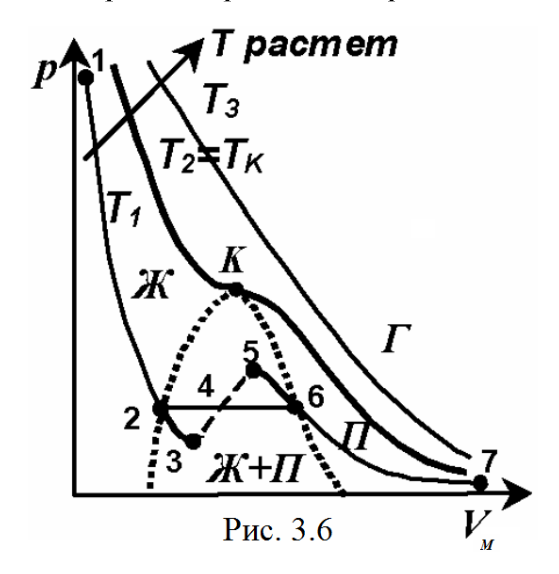


Рис. 3.6

При $(\boldsymbol{T} < \boldsymbol{T_K})$ уравнению Ван-дер-Ваальса будет соответствовать кривая 1-2-3-4-5-6-7 (рис. 3.6). На участке 5-3, сжатие вещества сопровождается уменьшением давления, следовательно, в этой области вещество распадается на ***2 фазы*** – жидкость и пар. (***Фаза*** – *совокупность частей системы, обладающих одинаковым химическим составом и находящихся в одинаковом термодинамическом состоянии*).

Истинные докритические изотермы реального газа имеют вид 1-2-6-7, и представляют собой кривые, описывающие непрерывный переход вещества из газообразного состояния (***Г***) в жидкое (***Ж***). Если через крайние точки (2 и 6) провести линии, то получится колоколообразная кривая, которая ограничит область двухфазных состояний вещества. Участок 6-2 сосстветствует равновесному существованию жидкости и газа. вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической называется паром (***П***), а пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью – *насыщенным* (***Ж+П***). Пар отличается от других газообразных состояний тем, что при изотермическом сжатии претерпевает процесс сжижения. Газ при температурах , не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении.

При некоторых условиях могут быть реализованы ***метастабильные*** состояния 5-6 и 2-3. Участок 2-3 соответствует *перегретой жидкости*, а 5-6 – *пересыщенному пару*.

## 3.4. Внутреняя энергия реального газа

Внутреняя энергия реального газа складывается из кинетической энергиитеплового движения молекул и потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия. Запишем выражение для нахождения внутренней энергии моля реального газа:

$$U_M = C_V T - \frac{a}{V_M} \quad (3.7)$$

Знак минус перед вторым слагаемым означает, что потенциальная энергия реального газа обусловлена только силами притяжения между молекулами, которые и создают давление внутри газа.

Как видно из формулы (3.7) внутреняя энергия реального газа растет с повышением температуры и увеличеснием объема. Если газ расширяется без теплообмена с окружающей средой, т.е. адиабатически ($\boldsymbol{\delta Q = 0}$) и не совершает работы (расширение газа в вакуум, т.е. $\boldsymbol{\delta A = 0}$), то из первого начала термодинамики $\boldsymbol{\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A}$ следует, что $\boldsymbol{U_2 = U_1}$.

***При адиабатичсеком расширении без совершения внешней работы внутренняя энергия газа не изменяется.***

Для ***идеального*** газа это означает, что $\boldsymbol{T_2 = T_1}$ (температура не меняется).

Для ***реального*** газа:

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) \quad (3.8)$$

Т.к. $\boldsymbol{V_2 > V_1}$, то $\boldsymbol{T_1 > T_2}$, т.е. реальный газ при ***адиабатическом*** расширении в вакуум ***охлаждается***. При ***адиабатическом*** сжатии реальный газ ***нагревается***.

Ументшение температуры реального газа при его адиабатическом расширении в вакуум используется для сжижения газов. Превращение любого газа в жидкость возможно лишь при температуре ниже критической. Самую низкую критическую температуру (5,3ºК) имеет гелий. Для сжижения газов используется либо эффект Джоуля-Томсона, либо охлаждение газа при совершении им работы. Изменение температуры реального газа в результате его адиабатического расширения (дросселирование) – медленного прохождения газа под действием перепада давлений сквозь перегородку (дроссель) называется эффектом ***Джоуля-Томсона***.

## 3.5. Жидкости и их описание. Поверхностное натяжение

Жидкость является агрегатным состоянием вещества, которое занимает промежуточное положение между газообразным и твердым, поэтому она обладает свойствами как газообразных, так и твердых веществ. Жидкость, как и твердое тело обладает определенным объемом, а подобно газу принимает форму сосуда, в котором находится.

В газах нет закономерности во взаимном расположении молекул. В твердых телах наблюдается дальний порядок – молекулы образуют кристаллическую решетку. В ***жидкостях*** дальний порядок отсутствует, а имеет место ближний порядок в расположении молекул – их упорядоченное расположение повторяется на расстояниях, сравнимых с межатомным. *Тепловое движение* молекулы в жидкости это ее колебание около определенного положения равновесия в течение некоторого времени, после чего молекула скачком переходит в новое положение, отстоящего от исходного на расстоянии порядка ***межатомного***.

*Радиус* **r** *молекулярногодействия* – расстояние (порядка $\sim 10^{-9}$м), при котором можно принебречь силами притяжения между молекулами жидкости. Сфера радиусом ***r*** называется ***сферой молекулярного действия***.

Силы, действующие на молекулу ***A*** внутри объема жидкости со стороны окружающих молекул, в среднем скомпенсированы (рис. 3.7). Для молекулы ***B***, расположенной на поверхности, равнодействующая сил $\vec{R}$ направлена *внутрь жидкости*.

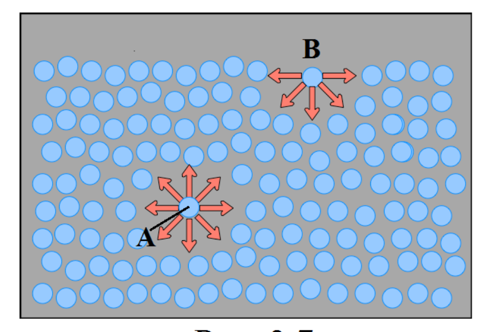


Рис. 3.7

Таким образом, результирующие силы всех молекул поверхностного слоя оказывают на жидкость ***молекулярное (внутреннее) давление***. Суммарная энергия частиц жидкости представляет собой энергию теплового движения и потенциальную энергию взаимодействия. Для перемещения молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой необходимо затратить работу. Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличении потенциальной энергии. Поэтому молекулы поверхностного слоя жидкости обладают большей потенциальной энергией, чем молекулы внутри жидкости. Эта дополнительная энергия называется ***поверхностной энергией*** и она пропорциональна площади поверхности Δ***S***:

$$\Delta E = \sigma \Delta S \qquad (3.9)$$

где ***σ*** – ***коэффициент поверхностного натяжения***, определяемый как плотность поверхностной энергии.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела *минимальную поверхность*, т.е. ***форму шара***.

Поверхностный слой жидкости аналогичен растянутой упругой пленке, в которой действуют силы натяжения. Эти силы направлены по касательной к поверхности жидкости и препендикулярно участку контура, на который они действуют. Пусть под действием сил поверхностного натяжения поверхность жидкости сократилась, и контур переместился в новое положение (рис. 3.8), при этом силы, действующие на элемент Δ***l*** контура, совершают работу Δ***A***=***f***·Δ***l***·Δ***x***, где ***f*** – сила поверхностного натяжения, действующая на единицу длины контура поврхности жидкости. Т.к. Δ***l***·Δ***x***=Δ***S***, то Δ***A***=***f***·Δ***S***. Поскоьку эта работа совершается за счет уменьшения поверхностной энергии Δ***A***=Δ***E***, то ***σ***=***f***, т.е. поверхностное натяжение равно силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность.

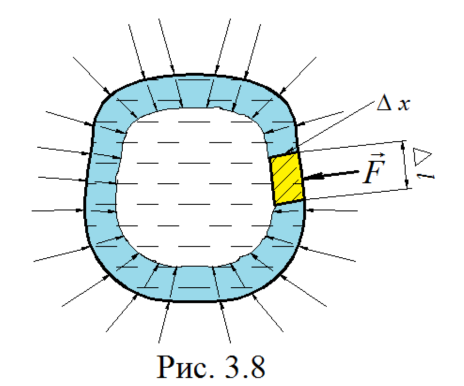


Рис. 3.8

***Единица поверхностного натяжения*** – [Н/м] или [Дж/м$^2$].

При температуре Т~300°К поверхностное натяжение равно $10^{-2} \div 10^{-1}$ [Н/м]. При увеличении температуры ***σ*** уменьшается, т.к. увеличивается среднее расстояние между молекулами жидкости. Поверхностное натяжение зависит от примесей. Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называются *поверхностно-активными (ПАВ)*. Например, по отношению к воде это мыло, спирты, эфиры, нефть.

Существуют вещества (соль, сахар), которые увеличивают поверхностное натяжение, благодаря тому, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Так, например, если посолить мыльный раствор, то в поверхностный слой жидкости будут выталкиваться в основном молекулы мыла. В мыловаренной промышленности таким способом мыло «высаливается» из раствора.

## 3.6. Смачивание

***Смачивание*** – явление искривления свободной поверхности жидкости при соприкосновении жидкости с поверхностью твердого тела.

Поверхность жидкости, искривленная на границе с твердым телом, называется ***мениском***. Линия, по которой мениск пересекается с твердым телом, называется ***периметром смачивания***.

Явление смачивания характеризуется краевым углом θ между поверхностью твердого тела и мениском в точках их пересечения (в точках периметра смачивания). Жидкость называется ***смачивающей*** твердое тело, если краевой угол острый: $\mathbf{0} < \theta < \frac{\pi}{2}$ (рис. 10.9а) и ***несмачивающей***, если краевой угол тупой: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (рис. 10.9б). Если ***θ=0***, смачивание считается *идеальным* (полным). Случай ***θ=π*** – это *идеальное* (полное) несмачивание.

Смачивание Несмачивание

Смачивание Несмачивание

а) б)

Рис. 3.9

Смачивание зависит от характера сил, действующих между поверхностными слоями соприкасающихся сред. Если *силы притяжения между молекулами твердого тела и жидкости* больше, чем силы притяжения молекул жидкости друг к другу, то жидкость будет ***смачивающей***. Если *молекулярное притяжение в жидкости* превышает силы притяжения молекул жидкости к молекулам твердого тела, то жидкость ***не смачивает*** твердое тело.

## 3.7. Давление под искривленной поверхностью жидкости

В случае искривленной поверхности, она оказывает на жидкость **избыточное** (добавочное) давление.

Если поверхность жидкости не плоская, то стремление ее к сокращению приведет к возникновению давления, дополнительного к тому, которое испытывает жидкость с плоской поверхностью (рис. 3.10а). Это давление обусловлено силами поверхностного натяжения, напрывленными внутрь жидкости, для выпуклой поверхности ***положительно*** (рис.3.10б). Для вогнутой поверхности жидкости результирующая сила поверхностного натяжения направлена из жидкости и давление внутри жидкости будет ***отрицательным*** (рис. 3.10в).

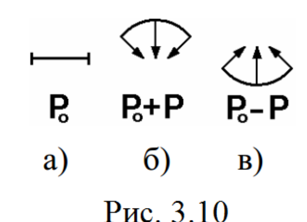



Рис. 3.10

Определим добавочное давление для сферической поверхности. Для этого мысленно рассечем сферическую каплю радиуса $\boldsymbol{R}$ на два полушария, как показано на рис 3.11.

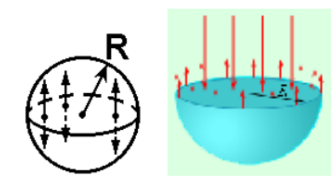



Рис. 3.11

Из-за поверхностного натяжения оба полушария притягиваются друг к другу с силой $\boldsymbol{F = \sigma \cdot l = \sigma \cdot 2\pi R}$. эта сила прижимает друг к другу оба полушария по поверхности $\boldsymbol{S = \pi R^2}$ и

обуславливает дополнительное давление:

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\pi R\sigma}{\pi R^2} = \frac{2\sigma}{R} \qquad (3.10)$$

Добавочное давление $\Delta \boldsymbol{p}$ под произвольной поверхностью определяется ***формулой Лапласа:***

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad (3.11)$$

где $\boldsymbol{R_1}$, $\boldsymbol{R_2}$ - радиусы кривизны взаимно перпендикулярных сечений жидкости в данной точке. Радиус кривизны *положителен*, если центр кривизны соответствующего сечения находится ***внутри*** жидкости, и *отрицателен*, если центр кривизны находится ***вне*** жидкости.

Из формулы (3.11) видно, что величина добавочного давления возрастает с увеличением коэффициента поверхностного натяжения и уменьшением кривизны поверхности. Из формулы Лапласа следует, что:

- *для сферической поверхности* ($\boldsymbol{R_1 = R_2}$) и $\Delta \boldsymbol{p} = \frac{2\sigma}{R}$;
- *для цилиндрической поверхности* ($\boldsymbol{R_1 = R}$, $\boldsymbol{R_2 = \infty}$) и $\Delta \boldsymbol{p} = \frac{\sigma}{R}$;
- *для плоской поверхности* ($\boldsymbol{R_1 = R_2 = \infty}$) и $\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, т.е. силы поверхностного натяжения дополнительного давления не создают.

Избыточное давление внутри мыльного пузыря радиуса R вызывается действием обоих поверхностных слоев тонкой сферической мыльной пленки, поэтому:

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R} \qquad (3.12)$$

## 3.8. Капиллярные явления

***Капилляры*** – узкие цилиндрические трубки с диаметром менее 1 миллиметра. Если поместить капилляр одним концом в жидкость, налитую вширокий сосуд, то, вследствии смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра, кривизна поверхности жидкости в капилляре станет значительной. Если жидкость смачивает матприал трубки, то внутри нее мениск имеет вогнутую форму (рис. 3.12а), если не смачивает – выпуклую (рис. 3.12б).

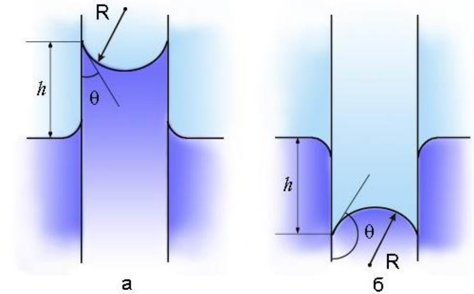


Рис. 3.12

Под вогнутой поверхностью жидкости появится отрицательное избыточное давление:

$$\Delta p = -\frac{2\sigma}{R}$$

(3.13)

Наличие этого давления приводит к тому, что жидкость в капилляре поднимается, т.к. под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление $\Delta \boldsymbol{p}$ приведет к опусканию жидкости в капилляре. Явление изменения высоты уровня жидкости в капиллярах назывvается ***капиллярностью***.

Жидкость в капилляре поднимается или опускается на такую высоту $\boldsymbol{h}$, при которой давление столба жидкости (***гидростатической давление***) уравновешивается избыточным давлением $\Delta \boldsymbol{p}$:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{S} = \rho g h \qquad (3.14)$$

Отсюда, *высота поднятия (глубина опускания)* жидкости в капилляре:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma}{\rho g r}\cos\theta \qquad (3.15)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – плотность жидкости, $\boldsymbol{r}$ – радиус капилляра, $\boldsymbol{R}$ – радиус кривизны мениска, $\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения, $\boldsymbol{\theta}$ – краевой угол.

Высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу. В соответствии с тем, что смачивающая жидкость поднимается по капилляру, несмачивающаяся – опускается из формулы (3.15) видно, что при $\mathbf{0} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\boldsymbol{cos\theta} > \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{h} > \mathbf{0}$ – жидкость поднимается по капилляру. Если $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, то $\boldsymbol{cos\theta} < \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{h} < \mathbf{0}$ – жидкость опускается по капилляру.

В тонких капиллярах жидкость может подниматься достаточно высоко. Например, при полном смачивании вода в капилляре диаметром 10 мкм поднимается на высоту 3 м.

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Влагообмен в почве и растениях, действие фитилей, впитывание влаги бетоном основано на капиллярности.

## 3.9. Кристаллические и аморфные твердые тела

***Твердым телом*** называется агрегатное состояние вещества, характеризующиеся *постоянством формы и объема*, причем тепловые движения частиц в них представляют собой *хаотические колебания частиц* относительно положений равновесия, что объясняется наличием значительных сил межмолекулярного взаимодействия.

Твердые тела подразделяются на кристаллические и аморфные. ***Кристаллические тела*** – это твердые тела, имеющие упорядоченное, периодически повторяющееся расположение частиц. Структура, для которой характерно регулярное расположение частиц с периодической повторяемостью в трех измерениях, называется ***кристаллической решеткой*** (рис. 3.13). Точки, в которых расположены частицы, а точнее – средние равновесные положения, около которых частицы совершают колебания, называются ***узлами кристаллической решетки***.

Рис. 3.13

Характерной особенностью кристаллов является их анизотропность – зависимость физических свойств (упругих, механических, тепловых, электрических, магнитных, оптических) от направления. Анизотропия кристаллов объясняется тем, что плотность расположения частиц по разным направлениям не одинаковая (вдоль прямых на рис. 3.13). Если кристаллическое тело состоит из единственного крислалла, оно называется ***монокристаллом***. Монокристаллами является большинство минералов. Условием роста монокристаллов является чистый раствор и медленное охлаждение расплава. Если эти условия не выполняются, то при кристаллизации получится мелкокристаллическая структура. Твердое тело, состоящее из множества беспорядочно ориентированных кристаллических зерен, называется ***поликристаллом***. В поликристаллах анизотропия наблюдается только для отдельных мелких кристалликов. Различная ориентация этих кристалликов приводит к усреднению свойств поликристаллов по всем направлениям, поэтому для поликристаллов характерна изотропность свойств по всем направлениям.

Твердые тела, физические свойства которых одинаковы по всем направлениям (изотропны), называются ***аморфными***. Для аморфных тел, как и для жидкостей, характерен *ближний порядок* в расположении частиц, но в отличии от жидкостей, подвижность частиц в них довольно мала.

Органические аморфные тела, молекулы которых состоят из большого числа одинаковых длинных молекулярных цепочек, соединенных химическими связями, называют ***полимерами*** (каучук, полиэтилен, резина).

## 3.10. Теплоемкость твердых тел

Рассмотрим идеальную кристаллическую решетку, в узлах которой частицы, принимаемые за материальные точки, колеблются вблизи положений равновесия в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Следовательно, частицы имеют три колебательные степени свободы, каждая из которых обладает энергией $\boldsymbol{kT}$.

Внутренняя энергия 1 моля твердого тела может быть найдена по формуле

$$U_M = 3N_A kT = 3RT \tag{3.16}$$

Молярная теплоемкость твердого тела будет

$$C_V = \frac{dU_M}{dT} = 3R \approx 25 \frac{Дж}{моль \cdot К} \tag{3.17}$$

Соотношение (3.17) называется ***законом Дюлонга и Пти***. Из закона видно, что молярная теплоемкость химически простых тел в кристаллическом состоянии одинакова и *не зависит от температуры*.

Если твердое тело является химическим соединением (например ***NaCl***), то число частиц в моле равно $\boldsymbol{nN_A}$, где $\boldsymbol{n}$ – число атомов в молекуле (для ***NaCl*** число частиц в моле равно $\boldsymbol{2N_A}$). Поэтому молярная теплоемкость твердых химических соединений будет равна сумме атомных теплоемкостей элементов, составляющих данное соединение:

$$C_V = 3nR \approx 25n \frac{Дж}{моль \cdot К} \tag{3.18}$$

Опытные данные подтверждают закон Дюлонга-Пти, хотя ряд элементов (***C, Be, B***) имеют отклонения от вычисленного значения $\boldsymbol{C_V}$. Для них, при низкихтемпературах, вблизи $\boldsymbol{0°K}$ $\boldsymbol{C_V \sim T^3}$, а при высоких $\boldsymbol{C_V = 3R}$. Отклонения от закона Дюлонга-Пти при низких температурах объясняют исходя из квантовых представлений.

## 3.11. Плазма – четвертое агрегатное состояние вещества

Четвёртым агрегатным состоянием вещества часто считают плазму. ***Плазма*** – частично или полностью ионизированный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Термин “*плазма*” в физике был введен в 1929 американскими учеными И. Ленгмюром и Л. Тонксом.

В лабораторных условиях плазма образуется в электрическом разряде в газе, в процессах горения и взрыва. В веществе, разогретом до температуры в сотни тысяч и миллионы градусов, атомы сталкиваются друг с другом с такой силой, что не могут сохраниться в целостности. При ударе атомы разделяются на более мелкие составляющие - атомные ядра и электроны. Эти частицы наделены электрическими зарядами: электроны - отрицательным, а ядра – положительным. Смесь этих частиц, представляет собой своеобразное состояние вещества, которое очень сильно отличается от относительно холодного газа по свойствам. Свойства плазмы:

- **<u>Степень ионизации</u>** определяется как отношение числа ионизованных частиц к общему числу частиц. Для ***низкотемпературных плазм*** характерны малые степени ионизации (<1%). Типичные применения низкотемпературных плазм включают плазменную модификацию свойств поверхности, плазменное травление поверхностей (полупроводниковая промышленность), очистка газов и жидкостей (озонирование воды и сжигание частичек сажи в дизельных двигателях). ***Горячие плазмы*** почти всегда полностью ионизованы (степень ионизации ~100%). Обычно именно они понимаются под «*четвертым агрегатным состоянием вещества*». Примером может служить Солнце.
- **<u>Плотность.</u>** Помимо температуры, которая имеет фундаментальную важность для самого существования плазмы, вторым наиболее важным свойством плазмы является плотность. ***Плотность плазмы*** обычно ассоциируют с ***плотностью электронов***, т.е. число свободных электронов в единице объема. Важной величиной является ***плотность нейтральных атомов***. В горячей плазме она незначительна, но играет важную роль для физики процессов в плазме.
- **<u>Квазинейтральность</u>.** Так как плазма является очень хорошим проводником, она стремится экранировать все электрические поля. Это приводит к явлению ***квазинейтральности*** – плотность отрицательных зарядов практически равна плотности положительных зарядов. Существуют и не квазинейтральные плазмы – пучок электронов с малой плотностью заряда.

Получить плазму можно несколькими способами, которые позволяют оторвать часть электронов от атомов (ионизация). Это ионизация тепловой энергией, электрическим разрядом, давлением и лазерным излучением.

Наиболее широко плазма применяется в светотехнике – в газоразрядных лампах, освещающих улицы. Всякий, кто имел «удовольствие» устроить в электрической сети короткое замыкание, встречался с плазмой. Искра, которая проскакивает между проводами, состоит из плазмы электрического разряда в воздухе. Дуга электрической сварки тоже плазма. Любое вещество, нагретое до достаточно высокой температуры, переходит в состояние плазмы. Легче всего это происходит с парами щелочных металлов, таких, как натрий, калий, цезий.

Кроме того, плазма применяется в самых разных газоразрядных приборах: выпрямителях электрического тока, стабилизаторах напряжения, плазменных усилителях и генераторах сверхвысоких частот (СВЧ), счётчиках космических частиц. Все так называемые газовые лазеры (гелий-неоновый, криптоновый, на диоксиде углерода и т. п.) на самом деле плазменные: газовые смеси в них ионизованы электрическим разрядом.

Центральной задачей физики плазмы является проблема управляемого термоядерного синтеза. Термоядерными называют реакции синтеза более тяжёлых ядер из ядер лёгких элементов (в первую очередь изотопов водорода - дейтерия D и трития T), протекающие при очень высоких температурах. В естественных условиях термоядерные реакции происходят на Солнце: ядра водорода соединяются друг с другом, образуя ядра гелия, при этом выделяется значительное количество энергии. Искусственная реакция термоядерного синтеза была осуществлена в водородной бомбе.

## 3.12. Изменение агрегатного состояния вещества

В жидкостях и твердых телах всегда есть некоторое количество молекул, энергии которых достаточно для преодоления притяжения к другим молекулам, и которые способны покинуть поверхность жидкости или твердого тела. Процесс отрыва и перехода молекул жидкости в окружающее пространство называется ***испарением*** (или ***парообразованием***) для твердых тел – ***сублимацией*** (или ***возгонкой***) (рис. 3.14). ***Парообразование*** – это процесс перехода из жидкого состояния в газообразное. Происходит с поглощением энергии, которая расходуется на разрыв межмолекулярных связей. Различают двва вида парообразования: **испарение** и **кипение**. _Испарение_ происходит со свободной поверхности жидкости при любой температуре. _Кипение_ происходит со всего объема жидкости при определенной температуре, называемой ***температурой кипения*** (*зависит от рода жидкости и атмосферного давления: с уменьшением давления температура кипения уменьшается*). При кипении температура жидкости не меняется, пока вся жидкость не выкипит. Количество теплоты $r$, которое поглощается (выделяется) 1 кг вещества при его превращении в пар (или конденсации), называется ***удельной теплотой парообразования:*** $r = \frac{Q}{m}$, $[r] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right]$. Для твердых тел процесс сублимации (нафталин, камфора) при обычных температурах незначителен. Примером сублимации является высыхание мокрого белья на морозе – лед переходит в пар, минуя жидкую фазу. В процессе сублимации изменяется удельный объём вещества и поглощается энергия (*теплота сублимации*).

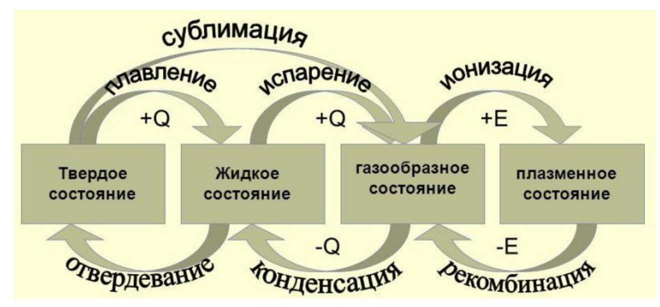



Рис. 3.14

***Конденсация*** – переход вещества из газообразного состояния в жидкое вследствии охлаждения или сжатия (рис.3.14). если число молекул, покидающих жидкость за единицу времени через единичную поверхность, равно числу молекул, переходящих из пара в жидкость, то наступает ***динамическое равновесие*** между процессами испарения и конденсации. ***Пар***, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называется ***насыщенным***.

***Плавлением*** называется переход вещества из твердого состояния в жидкое. Плавление происходит при определенной, возрастающей с увеличением внешнего давления, ***температуре плавления***. В процессе плавления теплота $Q$, сообщаемая веществу, идет на совершение *работы по разрушению кристаллической решетки*, и поэтому $T_{\text{пл}} = const$ (рис. 3.15) до расплавления всего кристалла. Количество теплоты $\lambda$, необходимое для расплавления 1 кг вещества, называется ***удельной теплотой плавления***: $\lambda = \frac{Q}{m}$, $[\lambda] = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\right]$.




Рис. 3.15

Если жидкость охлаждать процесс пойдет в обратном направлении (рис. 3.15), сначала температура жидкости понизиться до температуры плавления, а затем при $T_{\text{пл}} = const$ начинается кристаллизация. Для кристаллизации вещества необходимо наличие ***центров***

***кристаллизации*** – кристаллических зародышей, которыми могут быть как кристаллики образующегося вещества, так и любые инородные включения. Если в чистой жидкости нет центров кристаллизации, то ее можно охладить до температуры, которая меньше температуры кристаллизации. При этом образуется ***переохлажденная жидкость***. Аморфные тела являются переохлажденными жидкостями. Особенностью аморфных тел является отсутствие определенной температуры плавления.

## 3.13. Фазовые переходы

***Фаза*** – это термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний того же вещества. Вода в закрытом сосуде представляет собой двухфазную систему: вода – жидкая фаза, смесь воздуха и водяного пара – газообразная фаза. Следует учитывать, что понятие «*фаза*» шире, чем понятие «*агрегатное состояние*». В пределах одного агрегатного состояния вещество может находиться в нескольких фазах, отличающихся по своим свойствам, составу и строению. Например, алмаз и графит являются различными твердыми фазами углерода.

Переход вещества из одной фазы в другую – фазовый переход – всегда связан с качественными изменениями свойств вещества. Примером фазового перехода является изменение агрегатного состояния вещества или переходы, связанные с изменением в составе, строении и свойствах вещества.

***Фазовый переход первого рода*** – это фазовое превращение, сопровождающееся поглощением или выделением теплоты, называемой *теплотой фазового перехода*. Пример – плавление, кристаллизация, сублимация. Фазовые переходы первого рода характеризуются постоянством температуры, изменениями энтропии и объема вещества. Подводимая при плавлении теплота идет не на нагрев тела, а на разрыв межатомных связей и разрушение кристаллической решетки, поэтому плавление происходит при постоянной температуре. При таких переходах – из болееупорядоченного кристаллического состояния в менее упорядоченное жидкое состояние – степень беспорядка возрастает, а значит согласно второго начала термодинамики, возрастает и энтропия системы. При увеличении межатомных расстояний – увеличивается объем тела (исключение вода).

***Фазовый преход второго рода*** – переход не связанный с поглощением или выделением теплоты и изменением объема. Он характеризуется постоянством объема и энтропии, но скачкообразным изменением теплоемкости.

Ландау определил фазовые переходы второго рода следующим образом: фазовые переходы второго рода связаны с изменением симметрии: выше точки перехода система обладает более высокой симметрией, чем ниже точки перехода.

Примерами фазовых переходов второго рода являются:

- переход ферромагнитных веществ при определенных давлении и температуре в парамагнитное состояние;
- переход металлов и накоторых сплавов всверхпроводящее состояние при температуре близкой к 0ºК;
- превращение обыкновенного жидкого гелия в другую жидкую модификацию, обладающую свойствами сверхтекучести.

## 3.14. Диаграмма состояния. Уравнение Клайперона-Клаузиса

Если система является однокомпонентной, т.е. состоящей из химически однородного вещества или его соединения, то понятие фазы совпадает с понятием агрегатного состояния вещества.

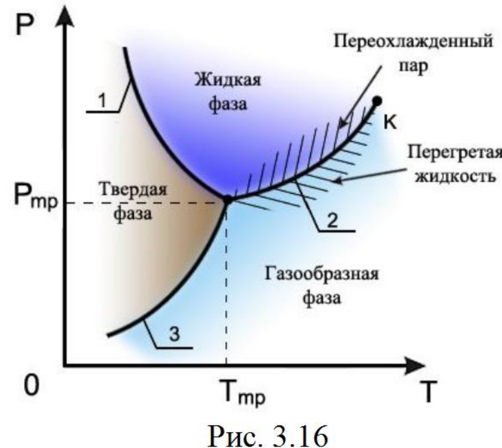


Рис. 3.16

Для наглядного изображения фазовых перврацений используется диаграмма состояния, на которой в координатах (***p***, ***T***) задается зависимость между температурой фазового перехода и давлением в виде кривых испарения (***2***), плавления (***1***) и сублимации (***3***), которые разделяют поле диаграммы на три области, соответствующие условиям существования твердой, жидкой и газообразной фаз (рис. 3.16). Кривые на диаграмме называются кривыми фазового равновесия, каждая точка на них соответствует условиям равновесия двух сосуществующих фаз.

***Тройная точка*** – это точка пересечения всех кривых фазового равновесия, которая определяет условия одновременного равновесного существования трех фаз вещества (температуру $\boldsymbol{T_{mp}}$ и давление $\boldsymbol{p_{mp}}$).

Тройная точка воды соответствует температуре 273,16ºК (или 0,01ºС) и является ***основной реперной точкой*** для построения термодинамической температурной шкалы.

В термодинамике существует метод рассчета кривой равновесия двух фазодного и того же вещества. Это позволяет сделать уравнение Клайпероно-Клаузиса. С помощью него можно определить изменение температуры фазового перехода в зависимости от изменения давления при равновесном процессе:

$$\frac{dp}{dT}=\frac{L}{T(V_2-V_1)} \qquad (3.19)$$

где $\boldsymbol{L}$ – теплота фазового перхода (например, в случае плавления – удельная теплота плавления), $(\boldsymbol{V_2-V_1})$ – изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую, $\boldsymbol{T}$ – температура перехода (например, в случае плавления – температура плавления).

Поскольку $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{T}$ всегда положительны, то наклон кривой равновесия определяется знаком $(\boldsymbol{V_2-V_1})$. Так при испарении и сублимации объем всегда возрастает, поэтому $\boldsymbol{dp/dT}>0$.

При плавлении у большинства веществ объем возрастает, следовательно, $\boldsymbol{dp/dT}>0$, т.е. увеличение давления приводит к повышению температуры плавления. Для некоторых веществ (вода, чугун) объем жидкой фазы меньше объема твердой фазы, т.е. $\boldsymbol{dp/dT}<0$; следовательно увеличение давления сопровождается понижением температуры плавления.

Диаграмма состояния позволяет судить, в каком состоянии будет находиться данное вещество при определенных  и , а также какие фазовые переходы будут происходить в том или ином процессе.

Например, при условиях, обозначенных точкой ***1***, вещество находится в твердом состоянии (**ТТ**), ***2*** – в газообразном (**Г**)***,*** ***3*** – одновременно в жидком (**Ж**) и газообразном (рис. 3.17).

При изобарном нагреве ***4-5-6*** вточке ***5*** начинается плавление, а в точке ***6*** – кипение. При изобарном нагреве ***7-8*** твердое тело превращается в газ, минуя жидкую фазу.

При изотермическом сжатии ***9-10*** вещество пройдет три состояния: *газ-жидкость-кристалл*.

Кривая испарения заканчивается *критической точкой* (**К**). поэтому возможен непрерывный перход вещества из жидкого состояния в газообразное и обратно в обход критической точки, без пересечения кривой испарения (***переход 11-12***), т.е. такой переход, который не сопровождается фазовыми превращениями.

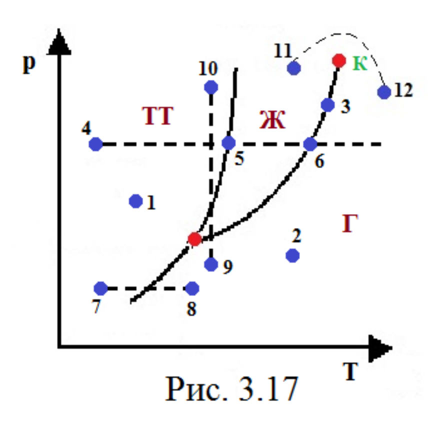


Рис. 3.17

Это возможно в следствии того, что различие между газом и жидкостью является чисто количественным (оба эти состояния являются изотропными).

Переход же кристаллического состояния в жидкое или газообразное может быть только *скачкообразным* (в результате фазового перехода), поэтому кривые плавления и сублимациине могут обрываться, как это имеет место для кривой испарения в критической точке. Кривая плавления уходит в бесконечность, а кривая сублимации идет в точку, где ***p=0*** и ***T=0***.

# Часть III.
# Электричество и магнетизм

Учение об электричестве и магнетизме рассматривает взаимодействия между материальными телами, осуществляемые посредством электромагнитного взаимодействия. Мерой электромагнитного взаимодействия является электрический заряд. Единицей измерения заряда является 1 Кулон.

Опытным путем установлено, что заряд:

1) скалярная величина;

2) бывает двух видов (положительный и отрицательный); заряды одного знака отталкиваются, заряды противоположных знаков притягиваются;

3) инвариантен (величина заряда не зависит от выбора системы отсчета);

4) дискретен (существует минимальный- элементарный заряд, он равен 1,6 $10^{-19}$ Кл, заряд любого тела кратен элементарному заряду);

5) аддитивен (заряд любого тела можно представить как сумму элементарных зарядов, элементарный заряд равен 1,6 $10^{-19}$ Кл);

6) заряды существуют не сами по себе, а связаны с частицами (существуют частицы без заряда, но не может быть заряда без частиц);

7) при любых взаимодействиях, происходящих внутри изолированной электрической системы алгебраическая сумма электрических зарядов системы не меняется (закон сохранения электрического заряда).

## Глава 1. Электростатика

**Электростатика** – раздел науки об электричестве, в котором изучаются взаимодействия и свойства систем электрических зарядов, неподвижных относительно выбранной инерциальной системы отсчета.

### 1.1. Электрическое поле в вакууме

#### 1.1.1. Напряженность электрического поля

Экспериментально установлено (Ш.Кулон, 1785г.), что два неподвижных точечных заряда взаимодействуют с силами, прямо пропорциональными произведению модулей зарядов и обратно пропорциональными квадрату расстояния между ними:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^{\;2}} \frac{\vec{r}}{r_{12}}. \qquad (1.1)$$

Здесь $q_1$, $q_2$- заряды, $r$- расстояние между зарядами, $\varepsilon_0$=8,85 $10^{-12}$ Кл$^2$/(Н м$^2$)- электрическая постоянная. На рисунке 1.1.1.1 изображены два заряда, для которых $q_1 q_2$>0. Заряды отталкиваются. Если $q_1 q_2$<0 заряды будут притягиваться.

Согласно современным представлениям взаимодействие зарядов осуществляется посредством электрического поля. Под физическим полем понимают пространство, в каждой точке которого задана некоторая физическая величина. Различают скалярные поля (поле температур, концентраций,

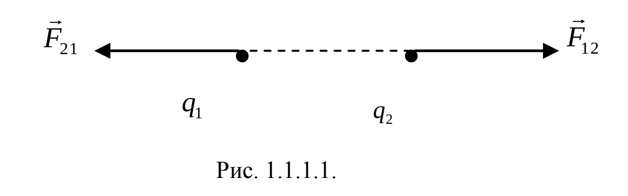


Рис. 1.1.1.1.

плотностей и др.), и векторные поля (поле сил, напряженностей, скоростей и др.).

Заряд, сообщенный телу, изменяет свойства пространства, окружающего тело- создает вокруг него электрическое поле. Это поле можно обнаружить, если поместить в какую-нибудь точку поля другой заряд (его называют «пробным).

Пробный заряд будет испытывать силовое воздействие со стороны электрического поля. Силовой характеристикой электрического поля является *напряженность электрического поля.* Напряженностью электрического поля называется величина, равная отношению силы, действующей со стороны поля на точечный пробный положительный заряд, помещенный в рассматриваемую точку поля, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \tag{1.2}$$

Напряженность электрического поля характеризует электрическое поле и не зависит от величины заряда, вносимого в поле. Напряженность электрического поля измеряют в Н/Кл или В/м.

Напряженность электрического поля неподвижного точечного заряда на расстоянии *r* от него определяется формулой:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^3}\vec{r}. \tag{1.3}$$

В поле, созданном неподвижным точечным зарядом, сила, действующая на внесенный в поле пробный заряд, не зависит от того, движется ли пробный заряд или покоится.

Для напряженности применим *принцип суперпозиции электростатических полей* – напряженность результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна геометрической сумме напряженностей полей каждого из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i. \tag{1.4}$$

$+q$

$\vec{l}$

$-q$

Рис.1.1.1.2.

Система из двух равных по модулю и противоположных по знаку электрических зарядов называется *электрическим диполем* (Рис. 1.1.1.2). Расстояние между зарядами в диполе значительно меньше расстояния от диполя до рассматриваемой точки электростатического поля. Вектор $\vec{l}$, направленный по оси диполя от отрицательного заряда к положительному, и равный по длине расстоянию между ними, называется *плечом диполя*. Вектор, совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда *q* на плечо $\vec{l}$, называется электрическим моментом диполя или *дипольным моментом.*

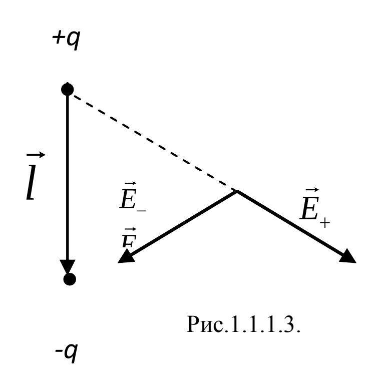


Рис.1.1.1.3.

$$\vec{p} = q\vec{l}. \tag{1.5}$$

Напряженность поля диполя в произвольной точке, согласно (1.4) , равна:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-, \tag{1.6}$$

где $\vec{E}_+$ -напряженность поля положительного заряда, $\vec{E}_-$- напряженность поля отрицательного заряда в данной точке (Рис.1.1.1.3).

Во многих случаях дискретное распределение зарядов заменяют непрерывным распределением, что не приводит к существенным ошибкам, но значительно упрощает вычисления. Различают линейную, поверхностную и объемную плотности зарядов ( заряд приходящийся на единицу длины, поверхности, объема соответственно):

$$\lambda = \frac{dq}{dl}\,,\ \sigma = \frac{dq}{dS}\,, \rho = \frac{dq}{dV}\,. \tag{1.7}$$

Напряженность электростатического поля, создаваемого в вакууме непрерывно распределенными зарядами может быть определена как:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_q \frac{dq}{r^3}\vec{r}\,, \tag{1.8}$$

**1.1.2. Потенциал**

Электрическое поле может быть описано не только с помощью напряженности электрического поля, но и с помощью потенциала.

Электрическое поле неподвижного точечного заряда сферически симметрично и представляет собой частный случай центрального поля. В механике доказывалось, что центральное поле потенциально (работа сил этого поля по перемещению точечного заряда из одной точки в другую не зависит от формы траектории, а определяется только начальными и конечными положениями переносимого заряда). Поэтому можно ввести понятие *потенциала.*

Работа поля, созданного зарядом $Q$, по перемещению пробного заряда $q$ из точки 1 в точку 2 равна:

$$A = \int\limits_1^2 \vec{F}d\vec{l} = \int\limits_1^2 q\vec{E}d\vec{l}\,, \tag{1.9}$$

Учитывая (1.1.1.4.) получим:

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qQ}{r_1} - \frac{qQ}{r_2}\right) = U_1 - U_2\,, \tag{1.10}$$

где $U_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_1}$- потенциальная энергия заряда $q$ в точке 1, а $U_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_2}$- потенциальная энергия в точке 2.

Потенциал электрического поля в некоторой точке поля есть величина, равная отношению потенциальной энергии точечного положительного заряда, помещенную в данную точку поля, к этому заряду:

$$\varphi = \frac{U}{q}\,. \tag{1.11}$$

Единицей измерения потенциала является 1 Вольт (1В=Дж/Кл).

Напомним, что потенциальная энергия определена лишь с точностью до произвольной аддитивной постоянной, значение которой не имеет роли, так как физическое значение имеет не потенциал, а разность потенциалов.

Потенциал в точке поля можно определить как отношение работы $A$, совершаемой силами поля при перемещении пробного заряда из данной точки поля в фиксированную точку, потенциал которой принят равным нулю, к этому заряду:

$$\varphi = \frac{A}{q}\,. \tag{1.12}$$

Для электростатического поля точечного заряда в качестве точки с нулевым потенциалом выбирают обычно бесконечно удаленную точку. В этом случае для потенциала точки, отстоящей на расстояние *r* от заряда *q* создающего поле, имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (1.13)$$

При выборе точки нулевого потенциала на бесконечности потенциал поля, создаваемого ***положительным зарядом*** всюду положителен, потенциал поля ***отрицательного заряда*** всюду отрицателен.

<u>*Потенциальная энергия*</u> некоторого заряда $q_1$ помещенного в электростатическое поле, равна произведению заряда на потенциал той точки поля, где он находится:

$$U = q_1\varphi. \qquad (1.14)$$

Если заряд $q_1$ находится в поле, создаваемом другим точечным зарядом *q,* то его потенциальная энергия, имеет вид:

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r}. \qquad (1.15)$$

При одноименных зарядах т. е. при отталкивании, потенциальная энергия положительна и убывает при разведении зарядов. При разноименных зарядах, т. е. при притяжении, электростатическая потенциальная энергия, как и потенциальная энергия в гравитационном поле, отрицательна и возрастает при разведении зарядов.

В соответствии с принципом суперпозиции потенциал произвольной точки поля системы точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке всеми зарядами:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i, \qquad (1.16)$$

<u>*Потенциальная энергия системы*</u> определяется как работа, совершаемая всеми силами взаимодействия при переходе системы из этой конфигурации в положение с нулевой потенциальной энергией. Энергия взаимодействия системы *N* неподвижных точечных зарядов выражается формулой:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\varphi_i, \qquad (1.17)$$

где $\varphi_i$ – потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме $q_i$ в той точке, где находится этот заряд:

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{r_{i_j}}, \qquad (1.18)$$

здесь $r_{ij}$ - расстояние между зарядами.

**1.1.3. Связь между напряженностью и потенциалом**

Работа по перемещению заряда *q* из точки с потенциалом $\varphi_1$ в точку с потенциалом $\varphi_2$, согласно (1.1.2.2) и (1.1.2.3) равна:

$$A_{1-2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (1.19)$$

Если рассматривать перемещение единичного точечного заряда в декартовой системе координат, то вдоль направления оси *Ox* работа поля по перемещению заряда :

$$dA = -qd\varphi = qE_x dx. \qquad (1.20)$$

Следовательно:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (1.21)$$

Аналогичные соотношения можно написать для других осей. Это дает возможность записать выражение:

$$\vec{E} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}\right) \quad (1.22)$$

или

$$\vec{E} = -grad\varphi, \quad (1.23)$$

Формула (1.23) показывает, что вектор напряженности электрического поля в каждой точке указывает направление, при смещении в котором потенциал поля падает наиболее быстро. Величина напряженности поля характеризует скорость изменения потенциала в том же направлении в точке.

Формулы (1.22) и (1.23) выражают связь потенциала с напряженностью и позволяют по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям напряженности в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

**1.1.4. Графическое изображение электрических полей**

Наглядное графическое изображение электростатических полей возможно с помощью картины силовых линий, дающей представление о напряженности в каждой точке поля, и с помощью эквипотенциальных поверхностей.

*Линии напряженности* – линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с направлением вектора напряженности.

Учитывая (1.9), выразим удельную работу поля (работу по перемещению единичного пробного заряда):

$$A' = \frac{A}{q} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l} = -d\varphi, \quad (1.24)$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, ибо работа сил поля не зависит от пути. Для обхода по замкнутому контуру $\varphi_1 = \varphi_2$ , и выражение (1.24) примет вид:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = 0, \quad (1.25)$$

Это соотношение верно только для электростатического поля.

Интеграл $\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L Edl\cos\alpha$ называют *циркуляцией вектора напряженности*.

Согласно (1.25) циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Это утверждение называется *теоремой о циркуляции вектора напряженности.*

Поле, у которого циркуляция вектора напряженности вдоль любого замкнутого контура равна нулю, называется потенциальным.

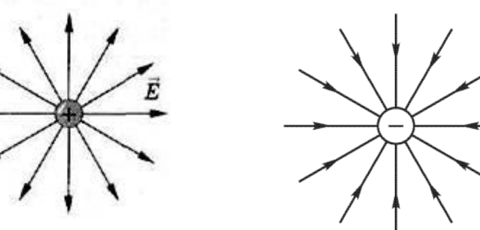


Рис.1.1.4.1.

Из обращения в нуль циркуляции вектора напряженности следует, что линии

напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми: они начинаются на положительных зарядах (*истоки*) и на отрицательных зарядах заканчиваются (*стоки*) или уходят в бесконечность. Распределение линий напряженности вокруг точечного заряда показано на Рис. 1.1.4.1

Линии напряженности никогда не пересекаются, так как в каждой точке пространства вектор напряженности имеет только одно направление; густота силовых линий отражает величину напряженности.

Характеристикой густоты силовых линий поля, пересекающих произвольную поверхность в пространстве, является *поток вектора напряженности*.

*Элементарный поток вектора напряженности* представляет собой скалярное произведение вектора напряженности поля на вектор элементарной площадки в данной точке пространства:

$$d\Phi_E = \left(\vec{E}d\vec{S}\right) = EdS\cos\alpha\,. \qquad (1.26)$$

Под вектором элементарной площадки понимается вектор нормали к этой площадке (см. рис. 1.1.4.2).

Для произвольно выбранной замкнутой поверхности $S$ поток вектора *напряженности* сквозь эту поверхность представляет собой полный поток вектора напряженности электростатического поля:

р

Рис. 1.1.4.2.

$$\Phi = \oint_S E_n dS\,, \qquad (1.27)$$

где $E_n$ – проекция вектора напряженности на нормаль к элементарной площадке $dS$.

*Теорема Гаусса- Остроградского* утверждает, что поток напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность, проведенную в поле, пропорционален алгебраической сумме электрических зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}\,. \qquad (1.28)$$

Теорема Гаусса-Остроградского позволяет найти электрическое поле в ряде случаев, когда распределение зарядов обладает какой-либо симметрией, например, симметрией относительно центра, плоскости или оси. В каждом из таких случаев нужно выбирать замкнутую поверхность целесообразной формы.

Наглядное графическое изображение электростатических полей возможно не только с помощью картины силовых линий, дающей представление о напряженности в каждой точке поля, но и с помощью эквипотенциальных поверхностей. *Эквипотенциальная поверхность* представляет собой множество точек, в которых потенциал имеет одно и то же значение.

Обычно изображают сечение этих поверхностей какой-либо плоскостью (плоскостью чертежа), поэтому на рисунках они выглядят линиями. Например, для электростатического поля точечного заряда эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы с общим центром в точке, где находится создающий поле заряд (см.рис. 1.1.4.3). Силовые линии электростатического поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

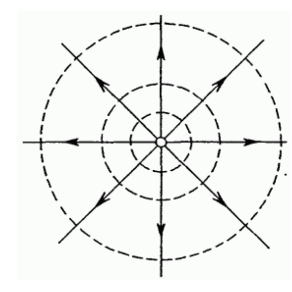


Рис.1.1.4.3.

Два способа изображения электростатических полей — силовыми линиями и эквипотенциальными поверхностями — эквивалентны: имея одну из этих картин, можно построить другую.

## 1.2. Электрическое поле в веществе

Электрическое поле в веществе (макрополе) рассматривают как пространственно усредненное микрополе.

Вещество представляет собой систему связанных положительных и отрицательных зарядов. При внесении вещества в электрическое поле заряды испытывают воздействие во стороны поля. По реакции на внешнее электрическое поле вещества разделяют на проводники и диэлектрики. Поведение проводников и диэлектриков в электрическом поле различно, что объясняется особенностями их внутренней структуры.

### 1.2.1. Проводники в электрическом поле

В моделях, объясняющих наблюдаемое поведение макроскопических проводящих тел, принимается, что вещество проводника содержит свободные заряды - заряженные частицы, способные перемещаться внутри проводника на любое расстояние под действием сколь угодно малой силы. Свободные заряды и являются главной причиной наблюдаемых свойств проводника в электрическом поле.

Если внести незаряженный проводник в однородное электрическое поле, то под действием поля в проводнике возникает направленное движение свободных носителей заряда: положительные заряды будут двигаться вдоль линий напряженности электрического поля, отрицательные- в направлении, противоположном направлению вектора напряженности этого поля. В результате чего произойдет разделение зарядов. Эти некомпенсированные разноименные заряды появляются на проводнике только под действием внешнего электрического поля, т.е. такие заряды являются индуцированными (наведенными), а в целом проводник по-прежнему остается незаряженным.

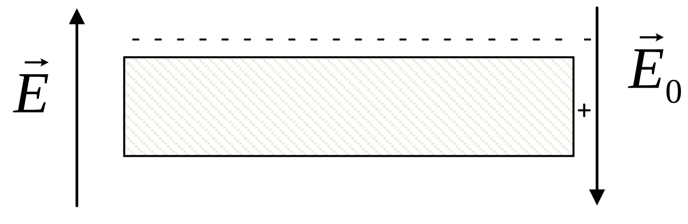



Рис. 1.1.2.1.

Такой вид электризации, при котором под действием внешнего электрического поля происходит перераспределение зарядов между частями данного тела, называют *электростатической индукцией.* (Рис. 1.1.2.1).

Появившиеся вследствие электростатической индукции на противоположных частях проводника некомпенсированные электрические заряды создают своё собственное электрическое поле, его напряженность внутри проводника направлена против напряженности внешнего поля, в которое помещен проводник. Напряженность результирующего поля внутри проводника становится равной нулю:

$$\vec{E}_0 + \vec{E} = 0\,, \qquad (1.29)$$

здесь $\vec{E}_0$ – внешнее электрическое поле, $\vec{E}$ – поле индуцированных зарядов.

При этом наступает равновесие зарядов на проводнике: весь некомпенсированный заряд будет располагаться на поверхности проводника. Так как движения зарядов нет, то

потенциал внутри проводника будет постоянен и равен потенциалу на поверхности проводника, т.е. поверхность проводника является эквипотенциальной поверхностью. Из (1.20) следует:

$$\frac{d\varphi}{dl} = -E_l = 0. \qquad (1.30)$$

Это значит, что вектор напряженности на поверхности проводника перпендикулярен поверхности.

Внутри заряженного проводника в состоянии равновесия, поле равно нулю. Поэтому удаление вещества из некоторого объема внутри проводника не должно отразится на равновесном положении зарядов. Это значит, что избыточный заряд в проводнике с полостью также, как и в сплошном расположен по его наружной поверхности. Таким образом, если в полости нет электрических зарядов, электрическое поле в ней равно нулю. Если в полости есть электрический заряд, а все внешнее пространство заполнено проводящей средой, поле во внешнем пространстве равно нулю, среда электрически нейтральна и не содержит нигде избыточных зарядов. По теореме Гаусса поток через замкнутую поверхность, который охватывает полость, равен нулю. Отсюда следует вывод: замкнутая проводящая оболочка разделяет все пространство на внутреннюю и внешнюю части, в электрическом отношении не зависящие друг от друга.

При сообщении проводнику заряда $q$ проводник приобретает потенциал $\varphi$. Экспериментально установлено, что отношение заряда, сообщенного проводнику, к потенциалу, который проводник получил в результате сообщения ему заряда, остается постоянным и зависит от геометрической формы самого проводника.

Постоянство отношения заряда проводника к его потенциалу является свойством проводника, обозначается обычно символом C и носит название емкости уединенного проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \qquad (1.31)$$

Единица измерения емкости –Фарад. (1Ф=Кл/В).

Работа $dA$ по перенесению заряда $dq$ из бесконечности на уединенный проводник определяет величину электрической энергии (потенциальной) этого проводника:

$$dA = \varphi dq = C\varphi d\varphi, \qquad (1.31)$$

Следовательно энергия проводника электрической емкостью *C,* заряженного до потенциала $\varphi$*:*

$$W_e = A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \qquad (1.32)$$

Большую электроемкость имеют системы из двух проводников, которые называют конденсаторами. Конденсатор представляет собой два проводника, разделенные слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами проводников. В этом случае проводники называют обкладками конденсатора.

Для двух близко расположенных проводников взаимная емкость равна:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \qquad (1.33)$$

*Взаимная емкость* двух проводников зависит от их *формы, размеров и взаимного расположения*, а также от *диэлектрических свойств* окружающей среды.

Простейшим конденсатором — плоским конденсатором — есть система из двух плоских ведущих пластин , размещенных параллельно друг другу на малом по сравнению с размерами пластин расстоянии и разделенных слоем диэлектрика. *Емкость плоского конденсатора* из двух пластин с площадью **S** каждая, расположенных на расстоянии *d* друг от друга, разделенных диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$, равна:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \tag{1.34}$$

Формула справедлива при справедливо при $d << \sqrt{S}$ .

**1.2.2. Диэлектрики в электрическом поле.**

*Диэлектрики* – это тела, в которых нет свободных носителей заряда, то есть нет заряженных частиц, которые могли бы перемещаться в пределах этого диэлектрика. Вещество диэлектрика содержит связанные заряды - заряженные частицы, способные перемещаться только на микроскопически малые расстояния. В диэлектриках могут находиться и свободные заряды, но их число очень мало по сравнению с числом свободных зарядов, находящихся в проводниках.

Если незаряженный диэлектрик поместить в электрическое поле, то заряды, находящиеся в нём, переместятся на микроскопические расстояния и займут новые положения равновесия, при этом электронейтральность диэлектрика сохранится. Помещение диэлектрика в электрическое поле вызывает возникновение отличного от нуля результирующего дипольного момента (поляризацию диэлектрика).

Для количественной оценки поляризации диэлектрика используют векторную величину – *поляризованность диэлектрика:*

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i, \tag{1.35}$$

где $\vec{p}_i$ – дипольный момент одной молекулы, V- объем диэлектрика.

Для большинства веществ поляризованность линейно зависит от напряженности внешнего электрического поля:

$$\vec{P} = \chi\varepsilon_0\vec{E}, \tag{1.36}$$

где $\chi$ – *диэлектрическая восприимчивость вещества.* Данная величина характеризует свойства диэлектрика; $\chi$ – безразмерная величина; всегда $\chi$ >0.

Природа поляризации диэлектрика зависит от строения диэлектрика. Выделяют несколько типов диэлектриков:

**1.** Неполярные диэлектрики - состоят из неполярных молекул, у которых центры тяжести положительного и отрицательного зарядов совпадают. Их дипольный момент равен нулю. В неполярных диэлектриках под действием электрического поля молекула приобретает дипольный момент, направленный по полю и величина которого зависит от электрического поля.

**2.** Полярные диэлектрики (дипольные) — состоят из полярных молекул, обладающих электрическим моментом. В таких молекулах из-за их асимметричного строения центры масс положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Внешнее электрическое поле ориентирует дипольные моменты молекул по направлению поля.

**3.** Ионные соединения представляют собой твердые неорганические диэлектрики с ионным типом химической связи. В ионных кристаллах внешнее электрическое поле приводит к смещению положительных ионов в направлении поля, а отрицательных ионов- в противоположном направлении, в результате возникает результирующий дипольный момент.

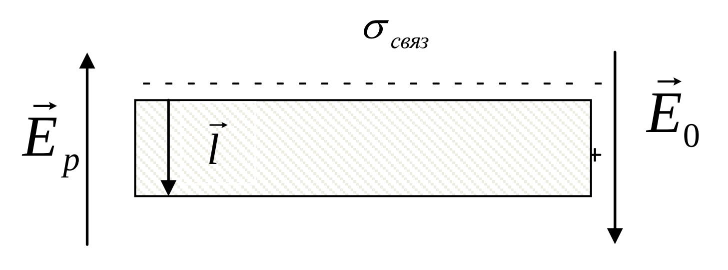


Рис. 1.2.2.1.

Поляризация диэлектрика приводит к тому, что в тонком поверхностном слое диэлектрика возникают некомпенсированные связанные заряды $q_{связ}$ (*поверхностные поляризационные заряды)*, величина которых может быть определена из значения индуцированного дипольного момента:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = q_{связ}\vec{l}\ . \tag{1.37}$$

Распределенные по поверхности связанные поляризационные заряды создают внутри диэлектрика поле с напряженностью $\vec{E}_p$, которое направлено против внешнего поля. Напряженность поля связанных зарядов определяется поверхностной плотностью этих зарядов $\sigma_p$:

$$\vec{E}_p = \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{P_n}{\varepsilon_0} \tag{1.38}$$

Результирующее поле внутри диэлектрика будет определяться суперпозицией этих полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p\ . \tag{1.39}$$

Если применить теорему Остроградского-Гаусса к полю в диэлектрике, то под $q$ следует понимать алгебраическую сумму всех свободных и связанных зарядов, охватываемых гауссовой поверхностью. Тогда из (1.28) следует:

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(q_{своб} + q_{связ}\right). \tag{1.40}$$

Величину связанных зарядов можно определить через вектор поляризации (при этом следует учесть, что поле связанных зарядов направлено против внешнего поля):

$$q_{связ} = -\oint_S \vec{P}d\vec{S}\ . \tag{1.41}$$

Из (1.40) с учетом (1.41) получим:

$$\oint_S \left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)d\vec{S} = q_{своб}. \tag{1.42}$$

*Электрическим смещением* $\vec{D}$ (*электрической индукцией*) называется вектор $\vec{D}$, определяемый выражением:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \tag{1.43}$$

С учетом (1.36) получим:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \tag{1.44}$$

где $\varepsilon = 1 + \chi$ – диэлектрическая проницаемость среды.

Таким образом, в диэлектрической среде теорема Остроградского –Гаусса формулируется в следующем виде: для произвольной замкнутой поверхности S поток вектора смещения электростатического поля $\vec{D}$ сквозь эту поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных зарядов.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_{своб}. \tag{1.45}$$

# Глава 2. Постоянный электрический ток

## 2.1 Закон Ома

Электрическим током называется движение электрических зарядов (электронов в металлах, электронов и ионов в жидкостях и газах) под действием электрического поля.

Различают ток проводимости (электрический ток в проводящих средах под действием электрического поля), конвекционный ток (механическое движение в пространстве макроскопических объектов).

Для существования электрического тока необходимо наличие в среде свободных носителей заряда и сил, приводящих эти носители в упорядоченное движение.

За направление тока принимается направление упорядоченного движения положительно заряженных носителей.

Количественной мерой является сила тока. Сила тока $I$ равна величине заряда $dq$, прошедшего в единицу времени $dt$ через поперечное сечения проводника:

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{2.1}$$

Единицей измерения силы тока является Ампер.

Ток, величина и направление которого не изменяются с течением времени, называются постоянным, в противном случае – переменным**.**

Заряд, прошедший за промежуток времени от $t_1$ до момента $t_2$:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I dt, \tag{2.2}$$

*Плотностью тока* называют отношение силы тока *dI* через элементарную площадку *dS*, перпендикулярную линиям тока, к ее площади*:*

$$j = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS}. \tag{2.3}$$

Направление вектора плотности тока совпадает с направлением вектора скорости упорядоченного движения положительных зарядов.

Сила тока через произвольную поверхность ***S*** определяется выражением:

$$I = \int_S \vec{j}d\vec{S} = \int_S j_n dS\,. \qquad (2.4)$$

Если носителями заряда являются положительные и отрицательные частицы, то плотность тока определяется формулой:

$$\vec{j} = \rho_+\vec{u}_+ + \rho_-\vec{u}_-\,, \qquad (2.5)$$

здесь $\rho_+, \rho_-$ – объемные плотности заряда, $\vec{u}_+, \vec{u}_-$ – скорости их упорядоченного движения.

В цепи, состоящей из проводника, между концами которого создана разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2 \neq 0$, под действием поля кулоновских сил свободные носители заряда придут в движение. Для того чтобы поддержать движение зарядов, необходим дополнительный механизм, обеспечивающий перенос положительных зарядов против поля кулоновских сил. Для этого необходим источник сторонних сил (сил не кулоновской природы). Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по цепи зарядами. Эта работа складывается из работы, совершаемой против электрического поля внутри источника тока ($A_{ист}$ и работы, совершаемой против сил сопротивления среды $A_c$) , т.е.*:*

$$A_{стор} = A_{ист} + A_c\,. \qquad (2.6)$$

Величина, равная отношению работы, которую совершают сторонние силы при перемещении точечного положительного заряда вдоль всей цепи, включая и источник тока, к заряду , называется *электродвижущей силой источника тока* (э.д.с.)*:*

$$\varepsilon = \frac{A_{стор}}{q}\,. \qquad (2.7)$$

Работа против сил электрического поля, по определению, равна:

$$A_{стор} = q(\varphi_1 - \varphi_2)\,. \qquad (2.8)$$

Если полюсы источника разомкнуты, то и тогда $\varepsilon = \varphi_1 - \varphi_2$ (э.д.с. источника тока при разомкнутой внешней цепи равна разности потенциалов, которая создается на его полюсах). Таким образом, размерность электродвижущей силы совпадает с размерностью потенциала.

Стороннюю силу $F_{стор}$, действующую на заряд, можно представить в виде:

$$\vec{F}_{стор} = q\vec{E}\,. \qquad (2.9)$$

Векторную величину $\vec{E}$ называют напряженностью поля сторонних сил.

Работу сторонних сил над зарядом $q$ на всём протяжении замкнутой цепи можно выразить следующим образом:

$$A_{стор} = \oint \vec{F}_{стор}d\vec{l} = q\oint \vec{E}d\vec{l}\,. \qquad (2.10)$$

Учитывая (2.1.7) получим выражение для электродвижущей силы источника в виде:

$$\varepsilon = \frac{A_{стор}}{q} = \oint \vec{E}d\vec{l}\,. \qquad (2.11)$$

Таким образом, эдс, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил.

Для участка цепи электродвижущая сила, действующая на некотором участке 1 -2 , очевидно равна:

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 \vec{E}d\vec{l}\ , \qquad (2.12)$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля. Следовательно, результирующая сила, действующая в каждой точке цепи на заряд *q*, равна сумме сторонней и кулоновской сил. Работа, совершаемая равнодействующей силой, над зарядом *q* на участке цепи 1-2, дается выражением:

$$A_{12} = q\int_1^2 \left(\vec{F}_{cm} + \vec{F}_k\right)d\vec{l} = q\varepsilon_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (2.13)$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю. Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется *падением напряжения* или просто *напряжением U* на данном участке цепи. Из (2.1.13)следует, что:

$$U_{12} == \varepsilon_{12} + (\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (2.14)$$

При отсутствии сторонних сил напряжение *U* совпадает с разностью потенциалов

$$U_{12} == (\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (2.15)$$

*Сопротивлением* $R_{12}$ участка цепи между точками 1 и 2 называется:

$$R_{12} = \int_1^2 \rho\frac{dl}{S}\ , \qquad (2.16)$$

где $\rho$ – удельное сопротивление, $S$ – площадь сечения, $dl$ – длина.

Для однородного проводника постоянного сечения сопротивление равно:

$$R_{12} = \rho\frac{l_{12}}{S}. \qquad (2.17)$$

Одним из важнейших законов электрического тока является закон Ома (1826г.). Закон Ома справедлив для таких проводников, у которых сопротивление не зависит от приложенного напряжения и силы тока. К этому типу проводников относятся металлические проводники, уголь и электролиты. Существуют и другие проводящие материалы, к которым закон Ома неприменим. *Закон Ома в интегральной форме* гласит: сила тока *U* и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка *R*:

$$I == \frac{U}{R}. \qquad (2.18)$$

Если замкнутая цепь состоит из источника электрической энергии с э.д.с., равной $\varepsilon$, и внутренним сопротивлением *r*, а сопротивление внешней части цепи равно *R*, то закон Ома имеет вид:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \qquad (2.19)$$

Разность потенциалов на клеммах источника равна напряжению на внешней части цепи

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR = \varepsilon - Ir. \qquad (2.20)$$

*Закон Ома в дифференциальной форме* показывает, что плотность тока $\vec{j}$ прямо пропорциональна напряженности $\vec{E}$ электрического поля, действующего на свободные заряды и вызывающего их упорядоченное движение:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}\ , \qquad (2.21)$$

где $\sigma$ – проводимость проводника. Проводимость проводника связана с удельным сопротивлением соотношением:

$$\sigma\rho = 1 . \qquad (2.22)$$

*Закон Ома* определяет ток по падению напряжения или падение напряжения по величине тока для простейшей, неразветвленной цепи тока. В более сложных случаях расчет цепей тока производится на основе двух правил, указанных Кирхгофом (1847 г).

*Первое правило Кирхгофа (правило узлов):* алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0 . \qquad (2.23)$$

*Узлом* называется точка разветвленной цепи, в которой сходится более двух проводников.

*Второе правило Кирхгофа (правило контуров)*: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной цепи, алгебраическая сумма произведений токов $I_i$ на сопротивления $R_i$ соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС в контуре:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i . \qquad (2.24)$$

## 2.2 Электрический ток в веществе

Из элементарной молекулярно-кинетической теории следует, что объемная плотность тока представляет собой плотность потока электрического заряда. У различных проводников различны носители заряда, способные перемещаться по физическому объему, величины объемных концентраций и скорости направленного движения.

Если заряд переносят частицы одного вида, то (2.5) примет вид:

$$\vec{j} = \rho\vec{u} = qn\vec{u} . \qquad (2.25)$$

Подвижность заряда $\mu$ равна его скорости направленного движения, которую заряд приобретет при действии на него электрического поля напряженностью 1В/м.

$$\vec{u} = \mu\vec{E} . \qquad (2.26)$$

Подвижность положительных частиц- положительна, отрицательных частиц, соответственно, отрицательна.

Из (2.18), (2.25) и (2.26) получим выражение для проводимости вещества:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \mu_i n_i q_i \quad . \qquad (2.27)$$

В металлах плотность тока проводимости создается электронами. Электрон, как элементарная частица, был открыт Дж.Дж.Томсоном (1897 г.) Прямое определение заряда электрона было произведено в опытах Р.Милликена (1909г.), он оказался по современной совокупности экспериментальных данных равным:

$$e = -1{,}602189 \cdot 10^{-19} Кл .$$

В опытах К. Рикке, Л.И.Мандельштама и Н.Д. Папалекси, Толмена и Стюарта получено убедительное доказательство электронной проводимости металлов. Полученное в этих опытах отношение заряда к массе позволило оценить массу электрона, эта величина оказалась равной:

$$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31} кг .$$

Электропроводность металлов обеспечивается большим количеством свободных носителей заряда – электронов проводимости. В классической теории Друде-Лоренца электроны проводимости рассматриваются как *электронный газ*, обладающий свойствами идеального газа.

Электрическое поле вызывает упорядоченное движение (дрейф) электронов. Плотность тока определяется выжением:

$$\vec{j} = -n_0 |e| \langle \vec{v} \rangle \quad , \qquad (2.28)$$

где $\langle \vec{v} \rangle$ – средняя скорость дрейфа электронов.

Для всех металлов отношение коэффициента теплопроводности $\chi$ к удельной электрической проводимости $\sigma$ прямо пропорционально температуре абсолютной темепературе $T$ (*закон Видемана-Франца*):

$$\frac{\chi}{\sigma} = 3\left(\frac{k}{e}\right)^2 T \quad . \qquad (2.29)$$

В соответствии с классической теорией проводимости удельное сопротивление металлов определяется выражением:

$$\rho = \frac{2mu}{n_0 e^2 \lambda}, \qquad (2.30)$$

где $m$ – масса электрона; $u$ – средняя скорость теплового движения электронов, $n_0$ – концентрация электронов, $\lambda$ – средняя длина свободного пробега.

У *металлов* величина объемной концентрации носителей заряда практически не зависит от температуры, величина подвижности уменьшается с ростом температуры, а удельное сопротивление для металлов растет с повышением температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t) \quad . \qquad (2.31)$$

Некоторым металлам присуща *свехпроводимость*- нулевое электрическое сопротивление при достижении ими температуры ниже определённого значения.

Классическая теория проводимости металлов имеет ряд недостатков:

1. Не может объяснить линейную зависимость удельного сопротивления от температуры.
2. Дает неправильное значение молярной теплоемкости металлов.

В *полупроводниках* носителями заряда являются электроны и положительно заряженные квазичастицы- «дырки».Для образования в кристалле полупроводника пары «электрон-дырка» необходима *энергия активации* (минимальная энергия, которую нужно сообщить электрону, чтобы он оторвался от атома и стал подвижным носителем заряда).

Результирующая электропроводность собственного полупроводника определяется суммой электронной и дырочной компонент:

$$\sigma = e(n\mu_+ + n\mu_-), \qquad (2.32)$$

где $n$ - объемная концентрация зарядов, $\mu_+$ и $\mu_-$ - подвижности электронов и дырок, соответственно.

При повышении температуры полупроводника растет объемная концентрация носителей заряда в полупроводниках, и растет быстрее, чем уменьшается подвижность. Зависимость проводимости чистых полупроводников от температуры имеет вид:

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{E_A}{kT}}, \qquad (2.33)$$

где $E_A$ – энергия активации проводимости, $\sigma_0$ – коэффициент, характерный для конкретного полупроводника, $k$ – постоянная Больцмана.

Помимо нагревания к росту носителей зарядов в полупроводнике приводят и другие внешние факторы: воздействие светом, потоком быстрых частиц, сильным электрическим полем и т.д. Поэтому электропроводность полупроводниковых кристаллов чувствительна к внешним воздействиям, а также к содержанию дефектов и примесей в решетке.

Возможность управлять в широких пределах электропроводностью полупроводников изменением температуры, напряженности внешних полей и введением примесей является основой их многочисленных и разнообразных применений.

Электрический ток в *электролитах* обусловлен движением положительных ионов (катионов) и отрицательных ионов (анионов) в растворе.

Проводимость электролитов определяется выражением:

$$\sigma = ezn\left(\mu_+ + \mu_-\right), \qquad (2.34)$$

где $n$ - объемная концентрация зарядов, $\mu_+$ и $\mu_-$ - подвижности положительных и отрицательных ионов, $Z$- их валентность.

Электрический ток в электролитах сопровождается *явлением электролиза* – выделения на электродах составных частей электролита. М.Фарадей (1836г.), опираясь на электрохимические исследования сформулировал количественные соотношения, получившие названия законов Фарадея для электролиза.

*Первый закон Фарадея:* Масса вещества $m$, выделившегося на электроде прямо пропорциональна количеству заряда $q$, прошедшего через электролит:

$$m = kq, \qquad (2.35)$$

где $k$ – электрохимический эквивалент вещества (зависит от природы вещества).

*Второй закон электролиза:* Электрохимические эквиваленты различных веществ относятся, как их химические эквиваленты:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_{x1}}{k_{x2}}, \qquad (2.36)$$

где химическим эквивалентом вещества $\boldsymbol{k_{x1}}$ называется отношение молярной массы иона $A$ к его валентности $z$:

$$k_x = \frac{A}{z}. \qquad (2.37)$$

Объединенный закон Фарадея записывают таким образом:

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{z}q, \qquad (2.38)$$

где $F=q_eN_A$ – постоянная Фарадея.

В обычных условиях *газы* состоят из нейтральных атомов или (и) молекул и практически не проводят электрический ток. Под действием ряда факторов (космическое излучение, фотоионизация, тепловая ионизация и др.) в газах происходит ионизация-образование свободных носителей зарядов: отдельно существующих электронов, положительных и отрицательных ионов.

Для ионизации атма или молекулы требуется совершить *работу ионизации $A_u$* против сил связи электрона в атоме. *Потенциалом ионизации $\varphi_u$* называется разность потенциалов в ускоряющем электрическом поле, при которой электрон приобретает кинетическую энергию, равную работе ионизации:

$$\varphi_и = \frac{A_и}{q_e}. \qquad (2.39)$$

Процесс прохождения электрического тока через газ называют *газовым разрядом.* Различают:

1. *Несамостоятельный газовый разряд*- газовый разряд, вызванный внешними ионизирующими факторами.
2. *Самостоятельный газовый разряд*- газовый разряд, способный протекать в газе при отсутствии внешних ионизирующих факторов.

Типы самостоятельных разрядов: тлеющий, искровой, дуговой, коронный.

*Плазмой* называется сильно ионизированный газ, в котором концентрации положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы.

Для плазмы характерны:

1. высокая электропровдность, возрастающая с ростом температуры;
2. сильное взаимодействие с внешними магнитными и электрическими полями;
3. специфическое коллективное взаимодействие, осуществляющееся через усредненные магнитные и электрические поля, создаваемые самими частицами плазмы;
4. высокие упругие свойства, благодаря которым в плазме легко возбуждаются и распространяются упругие колебания;
5. диамагнитные свойства во внешнем магнитном поле.

## 2.3 Закон Джоуля–Ленца

Закон Джоуля–Ленца, открытый экспериментальным путем, устанавливает, что количество теплоты, выделавшееся при прохождении постоянного тока по проводнику, пропорционально произведению квадрата силы тока на время его протекания:

$$dQ = I^2 R dt, \qquad (2.40)$$

где коэффициентом пропорциональности является сопротивление проводника.

Количество теплоты, выделившееся на проводнике в единицу времени называют *тепловой мощностью*:

$$P = \frac{dQ}{dt} = I^2 R. \qquad (2.41)$$

Удельной тепловой мощностью называют мощность, выделяемую в единице объема проводящей среды. Удельная тепловая мощность тока пропорциональна квадрату плотности тока и удельному сопротивлению среды в данной точке:

$$P_{удел} = \rho j^2. \qquad (2.42)$$

Выражение (2.42) представляет собой закон Джоуля –Ленца в локальной форме и применим к любым проводникам вне зависимости от их формы, однородности и природы сил, возбуждающих электрический ток в проводящей среде.

Для случая, когда на носители зарядов действуют только электрические силы, выражение (2.42) принимает вид:

$$P_{удел} = \sigma E^2. \qquad (2.43)$$

# Глава 3. Магнитное поле

## 3.1. Магнитное поле в вакууме

*Магнитное поле* представляет собой одну из форм проявления электромагнитного поля. Эксперименты Х. Эрстеда (действие проводника стоком на магнитную стрелку) и А. Ампера (взаимодействие паралельных токов) показали, что между движущимися зарядами может возникнуть взаимодействие, не относящееся к электростатическому.

*Магнитное поле создается* движущимися электрическими зарядами, частицами и телами, облалающими магнитным моментом, а также изменяющимся во времени электрическим полем.

Силовой характеристикой магнитного поля является *вектор магнитной индукции B* (*вектор индукции магнитного поля*), который определяется:

1. по действию магнитного поля на движущуюся в нем заряженную частицу – точечный электрический заряд;
2. малый элемент проводника с током;
3. по действию магнитного поля на небольшую рамку с током.

Единицей измерения инукции магниного поля является Тесла (Тл).

Индукция $\vec{B}_q$ магнитного поля, возбуждаемого в вакууме зарядом *q***,** движущимся с постоянной скоростью $\vec{v}$ , малой по сравнению со скоростью света в вакууме, равна:

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q}{r^3}\left[\vec{v}\vec{r}\right], \tag{3.1}$$

где $\vec{r}$ – радиус- вектор, проведенный от частицы в точку наблюдения; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м- магнитная постоянная.

Электрический ток представляет собой упорядоченное движение зарядов в пространстве и поэтому возбуждает магнитное поле.

В ходе экспериментов Ж. Био, Ф. Савар установили, что индукция магнитного поля, создаваемого проводниками с током различной конфигурации, во всех случаях пропорциональна силе тока в проводнике *I* и зависит от расстояния *r* до точки, в которой определяется поле.

Анализируя результаты опытов Био и Савара, П. Лаплас пришел к выводу, что магнитное поле любого тока может быть вычислено как *результат* векторного сложения магнитных полей, создаваемых отдельными элементами тока.

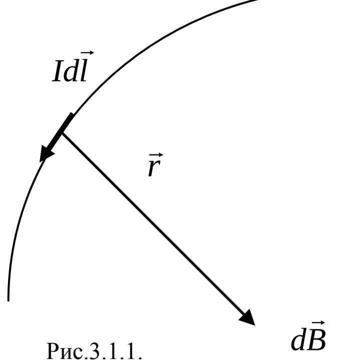


Рис.3.1.1.

Это правило получило название *принципа суперпозиции магнитных полей***:**

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i\ . \tag{3.2}$$

*Закон Био- Савара- Лапласа* утверждает, что магнитная индукция $d\vec{B}$ поля в вакууме малого элемента проводника длиной *dl*, по которому протекает электрический ток *I*, определяется выражением:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{r^3}\left[d\vec{l}\,\vec{r}\right]. \tag{3.3}$$

Полное поле в соответствии с принципом суперпозиции определяется выражением:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_l \frac{\left[d\vec{l}\,\vec{r}\right]}{r^3}. \qquad (3.4)$$

Так, закон Био- Савара- Лапласа позволяет вычислить магнитные поля токов различной конфигурации. Например:

1. Индукция магнитного поля тока, текущего по тонкому прямому проводнику бесконечной длины в произвольной точке, удаленной от оси проводника на расстояние *r*, можно записать

$$B == \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}. \qquad (3.5)$$

2. Индукция магнитного поля на оси кругового тока (точка, в которой определяют поле лежит на перпендикуляре, проведенном к плоскости кругового тока радиуса *R*, на расстоянии *x* от центра):

$$B == \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR^2}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}. \qquad (3.6)$$

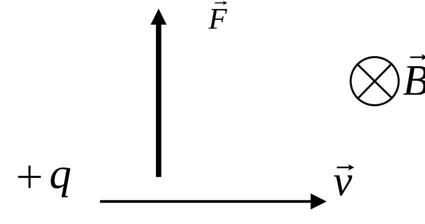


Рис.3.1.2

*Магнитное поле изображается* силовыми линиями магнитной индукции, по аналогии с силовыми линиями напряженности электрического поля.

Направление силовых линий магнитного поля – от северного полюса к южному, а касательная к силовым линиям магнитного поля совпадает с направлением вектора магнитной индукции. Линии магнитной индукции нигде не обрываются, они либо замкнуты.

На электрически заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле со скоростью *v*, действует *сила Лоренца*, которая направлена всегда перпендикулярно направлению движения (Рис. 3.2).

Величина этой силы определяется выражением:

$$\vec{F} = q\left[\vec{v}\vec{B}\right]. \qquad (3.7)$$

Сила Лоренца всегда перпендикулярна вектору скорости и не изменяет модуль скорости движущейся заряженной частицы, а лишь изменяет направление движения. Это означает, что *сила Лоренца* не совершает работы.

Если на движущийся электрический заряд одновременно действует магнитное поле и электрическое поле, то результирующая сила называется *обобщенной силой Лоренца*, она равна:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}\vec{B}\right]. \qquad (3.8)$$

В магнитном поле на элемент тока $Id\vec{l}$ действует сила Ампера, которая определятся выражением:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}, \vec{B}\right]. \qquad (3.9)$$

*Закон Ампера* - закон механического взаимодействия двух токов $I_1$ и $I_2$, текущих в малых отрезках проводников $dl_1$ и $dl_2$ соответственно, находящихся на некотором расстоянии *r* друг от друга. Сила взаимодействия равна:

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{I_1 I_2\left[d\vec{l}_2, \left[d\vec{l}_1\vec{r}\right]\right]}{r^3}. \qquad (3.10)$$

Замкнутый проводящий контур с током произвольной геометрической формы, помещенный в однородное магнитное поле, испытывает действие вращающего момента сил $\vec{M}$ :

$$d\vec{M} = \left[\vec{p}_m, \vec{B}\right], \qquad (3.11)$$

где $\vec{p}_m$ – магнитный момент контура с током. *Магнитный момент контура* равен:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}\,, \qquad (3.12)$$

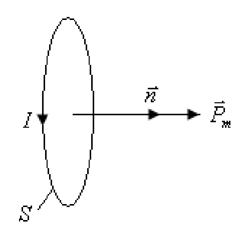


Рис.3.1.3.

где $I$ – ток,, текущий по контуру, $S$- *площадь, ограниченная контуром,* $\vec{n}$ – нормаль к контуру.

Момент сил стремится установить магнитный момент по направлению магнитной индукции в положение устойчивого равновесия.

*Основными законами магнитного поля* являются теорема Гаусса-Остроградского для магнитного поля и теорема о циркуляции индукции магнитного поля по замкнутому контуру.

*Теорема Гаусса- Остроградского для магнитного поля: м*агнитный поток сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю.

$$\Phi = \oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0\,. \qquad (3.13)$$

*Потоком вектора магнитной индукции* (магнитным потоком) $d\Phi$ сквозь малую поверхность плошадью $dS$ называется скалярная величина:

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS\cos(\vec{B}, \vec{n})\,. \qquad (3.14)$$

Циркуляцией вектора магнитной индукции по заданному контуру называется интеграл $\oint_L \vec{B}d\vec{l}$ .

*Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции* утверждает, что циркуляция вектора магнитной индукции через замкнутую постоянных токов по любому замкнутому контуру пропорциональна сумме сил токов, охваченных контуром:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \oint_L B_L dl = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k\,. \qquad (3.15)$$

## 3.2 Магнитное поле в веществе

Все тела при внесении их в магнитное поле создают собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее магнитное поле.

*Макротоками* называют токи проводимости и конвекционные токи, связанные с движением заряженных макроскопических тел. *Микротоки* (молекулярные токи)- токи, обусловленные движением электронов в атомах, молекулах и ионах.

Магнитное поле в веществе является суперпозицией двух полей: внешнего магнитного поля, создаваемого макротоками, и внутреннего, собственного, магнитного поля, создаваемого микротоками.

Магнитные свойства вещества определяются магнитными свойствами электронов и атомов. Есть вещества, у которых в отсутствие магнитного поля, магнитный момент атомов

равен нулю (диамагнетики) и вещества, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля магнитный момент атомов отличен от нуля (парамагнетики).

Количественной характеристикой реакции вещества на внешнее магнитное поле является намагниченность. *Намагниченностью* называется величина, равная отношению магнитного момента малого объема вещества к величине этого объема:

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{Z}\vec{P}_i . \qquad (3.16)$$

Все тела при внесении их в магнитное поле создают собственное магнитное поле, которое накладывается на внешнее магнитное поле. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (3.12) можно обобщить на случай магнитного поля в веществе:

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = \mu_0\left(I_{макро} + I_{микро}\right). \qquad (3.17)$$

Алгебраическая сумма сил микротоков связана с циркуляцией вектора намагниченности соотношением:

$$\oint_L \vec{J}d\vec{l} = I_{микро} . \qquad (3.18)$$

Тогда (3.17) с учетом (3.18) можно записать в виде:

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right)d\vec{l} = I_{макро} . \qquad (3.19)$$

*Напряженностью магнитного поля* называют вектор:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} . \qquad (3.20)$$

Измеряется напряженность в А/м (Ампер, деленный на метр).

Если среда изотропна, то

$$\vec{J} = \chi\vec{H} . \qquad (3.21)$$

Безразмерный коэффициент пропорциональности $\chi$ характеризует магнитные свойства вещества и называется *магнитной восприимчивостью среды*.

Из (3.20) и (3.21) следует:

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} , \qquad (3.22)$$

здесь $\mu$- *магнитная проницаемость вещества,* связана с магнитной восприимчивостью соотношением:

$$\mu = \chi + 1 . \qquad (3.23)$$

Для всех диамагнетиков $\chi < 0$, $\mu < 1$; для парамагнетиков $\chi > 0$, $\mu > 1$.

К *ферромагнетикам относят вещества*, обладающие магнитным моментом в отсутствие внешнего магнитного поля. Ферромагнетики обладают очень большой относительной магнитной проницаемостью (~ $10^3 - 10^6$) и поэтому при небольших значениях напряженности внешнего магнитного поля способны создавать внутри магнитное поле с большой индукцией. Для каждого ферромагнетика имеется температура, выше которой он превращается в парамагнетик.

# Глава 4. Электромагнитная индукция

## 4.1 Закон электромагнитной индукции

М. Фарадей (1831г.) открыл *явление электромагнитной индукции*, заключающееся в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название *индукционного*. Возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы, называемой *электродвижущей силой электромагнитной индукции*. На основе анализа опытов бы сформулирован количественный закон электромагнитной индукции, согласно которому, какова бы ни была причина изменения магнитного потока, охватываемого замкнутым контуром, возникающая в контуре электродвижущая сила индукции определяется формулой:

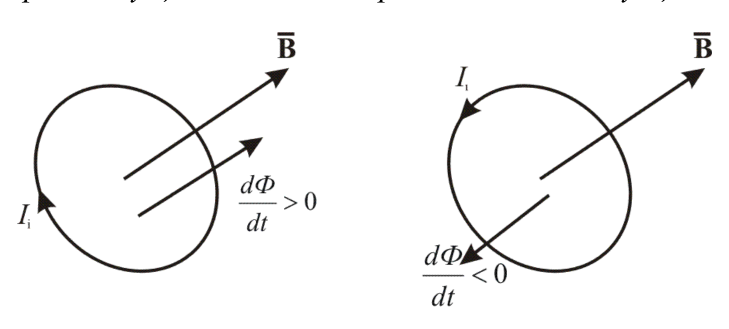



Рис. 4.1.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4.1)$$

С учетом соотношений (2.12) и (3.11) закон электромагнитной индукции можно записать в другом виде:

$$\varepsilon_i = \oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}d\vec{S}. \qquad (4.2)$$

Значение индукционного тока, а следовательно, и э.д.с. электромагнитной индукции, определяются только скоростью изменения магнитного потока. Направление индукционного тока определяется *правилом Ленца*: индукционный ток всегда направлен так, чтобы противодействовать причине его вызвавшей ( Рис.4.1).

Если замкнутый контур состоит из $N$ витков, и магнитный поток $\Phi$, пересекающий каждый виток, одинаков, то электродвижущая сила с таком контуре будет равна:

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (4.3)$$

Э.д.с. индукции возникает в неподвижном проводнике, расположенном в магнитном поле, которое изменяется со временем, или в проводнике, который движется в постоянном магнитном поле. Природа возникновения ЭДС в этих случаях разная.

Если проводник движется в постоянном магнитном поле (Рис. 4.2), то в этом случае на движущиеся электрические заряды (вместе с проводником) действует сила Лоренца. Э.д.с имеет магнитное происхождение и может быть выражена следующим образом:

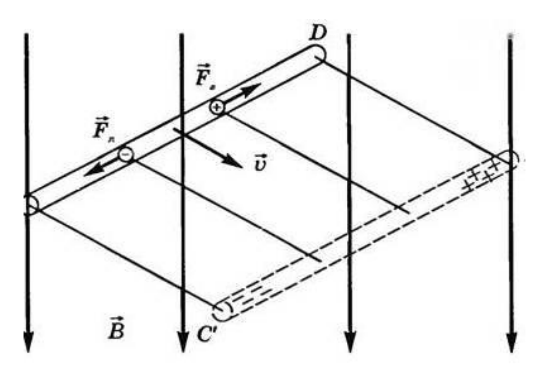



Рис. 4.2.

$$\varepsilon_i = -vBL\sin\alpha, \qquad (4.4)$$

здесь $l$-длина проводника, $\alpha$- угол между векторами магнитной индукции и скорости.

Когда проводник неподвижен, электрический ток появляется под действием магнитного поля. Таким образом, можно прийти к выводу, что электроны в неподвижном проводнике начинают двигаться под действием электрического поля, которое образует переменное магнитное поле. Тем самым утверждается новая фундаментальное свойство поля: изменяясь со временем, магнитное поле порождает *индукционное электрическое поле*. Проводник с запасом свободных электронов позволяет только выявить возникновение электрического поля. Индукционное электрическое поле (его называют *вихревым*) не связано с электрическими зарядами; его силовые линии замкнуты.

В общем случае, закон электромагнитной индукции примет вид:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint \left[\vec{v}\vec{B}\right]d\vec{l} \ . \qquad (4.5)$$

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этой цели используются *генераторы*, принцип действия которых можно рассмотреть на примере плоской рамки, вращающейся в однородном магнитном поле (Рис. 4.1.3).

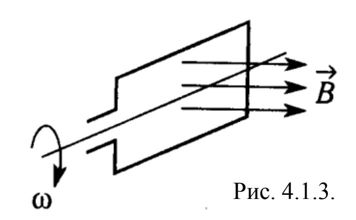


Рис. 4.1.3.

Рамка площадью $S$ вращается в однородном магнитном поле ( $\vec{B} = const$ ) равномерно с угловой скоростью ( $\omega = const$ ). Магнитный поток, пронизывающий площадь рамки, меняется во времени:

$$\Phi = BS\cos\omega t \ . \qquad (4.6)$$

При вращении рамки в ней будет возникать переменная э.д.с. индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega\sin\omega t \ . \qquad (4.7)$$

Максимальное значение э.д.с.:

$$\varepsilon_{i0} = BS\omega . \qquad (4.8)$$

Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим. Если через рамку, помещенную в магнитное поле, пропускать электрический ток, на нее будет действовать вращающий момент и рамка начнет вращаться. На этом принципе основана работа *электродвигателей*, предназначенных для превращения электрической энергии в механическую.

Явление взаимной индукции применяется в т*рансформаторах*- устройствах, которые используют для повышения или понижения напряжения переменного тока. Впервые трансформаторы были сконструированы и введены в практику П. Н. Яблочковым и И. Ф. Усагиным. Принципиальная схема трансформатора показана на Рис. 4.1.3. Трансформатор состоит из двух катушек с разным числом витков, закрепленных на замкнутом железном сердечнике.

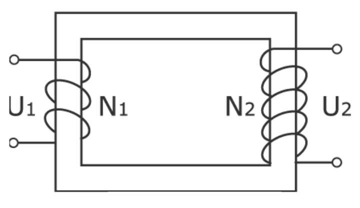


Рис.4.1.3.

Так как концы первичной катушки присоединены к источнику переменного напряжения $\varepsilon_1$,то в ней возникает переменный ток $I_1$, создающий переменный магнитный поток Ф, который практически полностью локализован в железном сердечнике и, следовательно, почти целиком пронизывает витки вторичной катушки. Изменение этого потока вызывает во вторичной катушке появление э.д.с. взаимной индукции, а в первичной — э.д.с. самоиндукции.

Для первичной катушки, согласно закону Ома:

$$I_1R_1 = U_1 = \varepsilon_1 - N_1\frac{d\Phi}{dt}, \tag{4.9}$$

где $R_1$— сопротивление первичной катушки, $U_1$ – падение напряжения на сопротивлении $R_1$.

При быстропеременных полях $U_1$ мало по сравнению с каждой из двух э.д.с., поэтому можно записать:

$$\varepsilon_1 \approx N_1\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.10}$$

Э.д.с. взаимной индукции, возникающая во вторичной обмотке, равна:

$$\varepsilon_2 = N_2\frac{d\Phi}{dt}. \tag{4.11}$$

Из (4.10) и ;4.11) получим:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2} = k, \tag{4.12}$$

где $k$ – коэффициент трансформации.

Пренебрегая потерями энергии, которые в современных трансформаторах очень малы, на основании закона сохранения энергии, можем записать, что мощность тока в обеих обмотках трансформатора практически одинакова:

$$\varepsilon_1 I_1 \approx \varepsilon_2 I_2, \tag{4.13}$$

Отсюда, учитывая (4.10):

$$k = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{I_1}{I_2}, \tag{4.14}$$

Если $k > 1$, то имеем дело с *понижающим трансформатором*, уменьшающим э.д.с. и повышающим ток, при $k < 1$, то имеем дело с *повышающим трансформатором*, увеличивающим переменную э.д.с. и понижающим ток.

Заметим, что есть трансформаторы, имеющие несколько вторичных катушек, обладающих разными рабочими напряжениями.

Индукционный ток возникает не только в линейных проводниках, но и в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. Эти токи оказываются замкнутыми в толще проводника и поэтому называются *вихревыми***.** Их так же называют *токами Фуко* в честь первого исследователя. Токи Фуко подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующего вихревые токи. Вихревые токи вызывают подвижных частей различных приборов. Помимо торможения (как правило, нежелательного эффекта) вызывают нагревание проводников.

Вихревые токи возникают и в проводах, по которым течет переменный ток. Вследствие возникновения вихревых токов быстропеременный ток оказывается распределенным по сечению провода неравномерно — он как бы вытесняется на поверхность проводника. Это явление получило название **скин-эффекта.** Так как токи высокой частоты практически текут в тонком поверхностном слое, то провода для них делаются полыми.

## 4.2 Явление самоиндукции

Явление *самоиндукции*, открытое Г. Генри (1832г.) является частным случаем явления электромагнитной индукции. Явление самоиндукции состоит в появлении э.д.с индукции в самом проводнике при изменении тока в нем.

Пусть в контуре течет ток $I$ . Он создает пронизывающий этот контур магнитный поток $\Phi$. Причем, согласно закону Био – Савара – Лапласа, индукция магнитного поля в таком контуре пропорциональна току в нем: $B \sim I$. Согласно (3.11) магнитный поток пропорционален индукции магнитного поля.:

$$\Phi = L \cdot I, \tag{4.15}$$

где $L$ – коэффициент пропорциональности, получивший название индуктивности контура. Индуктивность зависит от формы и размеров контура, а так же от магнитных свойств окружающей контур среды. Так для соленоида (катушки) индуктивность равна:

$$L = \mu\mu_0 n^2 Sl\,, \tag{4.16}$$

где $l$- длина соленоида, $n = \dfrac{N}{l}$ – плотность намотки (число витков $N$, приходящееся на единицу длины соленоида), $S$- площадь сечения соленоида.

Для жесткого контура в отсутствие поблизости ферромагнетиков, индуктивность постоянная величина. Единицей измерения индуктивности является Генри.

С учетом (4.5) выражение (4.1) принимает вид:

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}\,. \tag{4.17}$$

В соответствии с правилом Ленца возможный индукционный ток препятствует изменению магнитного потока через контур. Поэтому э.д.с. самоиндукции препятствует изменению тока в цепи. Наличие индуктивности в цепи приводит к замедлению исчезновения или установления тока в цепи. Так, если ток в цепи возрастает, то возрастает и магнитный поток, поэтому направление индукционного тока противоположно исходному току. При уменьшении силы тока в цепи, э.д.с. индукции поддерживает затухающий ток.

## 4.3 Энергия магнитного поля

Рассмотрим контур проводящий контур с индуктивностью $L$, подключенный к источнику. При размыкании контура ток в цепи будет убывать от $I$ до нуля.. В цепи возникнет ЭДС самоиндукции. За время изменения тока в цепи протечет заряд $dq$, который согласно (2.1) равен:

$$dq = Idt\,. \tag{4.18}$$

Элементарная работа по перемещению заряда, согласно (2.12), (2.17) и (4.17) может быть представлена следующим образом:

$$dA = \varepsilon_i dq = \varepsilon_i Idt = -LIdI\,. \tag{4.19}$$

Следовательно:

$$A = -\int_I^0 LIdI = \frac{LI^2}{2}\,. \tag{4.20}$$

Работа, совершаемая сторонними силами идет на приращение внутренней энергии контура. Совершение работы сопровождается исчезновением магнитного поля. Так как других изменений в это время не происходит, то можно утверждать, что работа совершена за счет *энергии магнитного поля* тока:

$$W = \frac{LI^2}{2} \qquad (4.21)$$

Учитывая (4.16), энергию магнитного поля соленоида можно записать следующим образом:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2}\mu\mu_0 n^2 SlI^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 n^2 VI^2, \qquad (4.22)$$

здесь учтено, что $Sl=V$- объем соленоида.

Магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Следовательно, энергия магнитного поля (4.5) локализована внутри соленоида и распределена по его объему с постоянной *плотностью w:*

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\mu\mu_0 n^2 I^2. \qquad (4.23)$$

Для длинного (бесконечного ) соленоида $H=nI$, поэтому, учитывая (3.22) , можем записать (4.23) в виде:

$$w = \frac{1}{2}\mu\mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}, \qquad (4.24)$$

Полученное выражение применимо только к диамагнитным и парамагнитным средам.

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме $V$:

$$W = \int_V w dV. \qquad (4.25)$$

# Глава 5. Система уравнений Максвелла

Теория электромагнитного поля была создана М. Максвеллом (1865 г.), оформившим ее в виде определенных уравнений для электрического и магнитного полей. Эти уравнения прежде всего формулировали в обобщенной форме известные во времена Максвелла закономерности касающиеся электрических и магнитных явлений:

1. закон Кулона,
2. закон Ампера
3. закон электромагнитной индукции Фарадея

Формулировка этих законов в дифференциальной форме позволила Максвеллу сформулировать ряд выводов:

1) электрическое поле имеет источники двух видов:

- - электрические заряды:

$$\oint \vec{D}d\vec{S} = q, \qquad (5.1)$$

- переменное магнитное поле:

$$\oint \vec{E}d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (5.2)$$

При этом заряды создают потенциальное электрическое поле, а переменное магнитное поле является источником электрического поля вихревого

2) магнитное поле:

- создается токами, протекающими по проводникам (их называют токами

проводимости) и переменным электрическим полем (идея об эквивалентности переменного электрического поля некоторому току- он называется *током смещения*- не была связана непосредственно с известными экспериментальными фактами, а была гениальной догадкой Максвелла):

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = \sum_{k=1}^{n} I_k + I_{смещения} . \quad (5.3)$$

- не имеет магнитных зарядов (они не существуют):

$$\oint \vec{B}d\vec{S} = 0 . \quad (5.4)$$

Из уравнений Максвелла вытекает вывод о существовании *электромагнитных волн*, в которых . электрический и магнитный вектора связаны между собой.

Электромагнитные волны обладают следующими свойствами:-

1. волны *поперечны* **(**колебания векторов напряженности переменного электрического поля и индукции переменного магнитного поля взаимно перпендикулярны и лежат в плоскостях, перпендикулярных вектору скорости распространения волны; векторы образуют правовинтовую систему: направление распространения электромагнитной волны совпадает с поступательным движением острия винта, который вращается по направлению кратчайшего поворота от вектора к вектору (Рис. 5.1.) ;

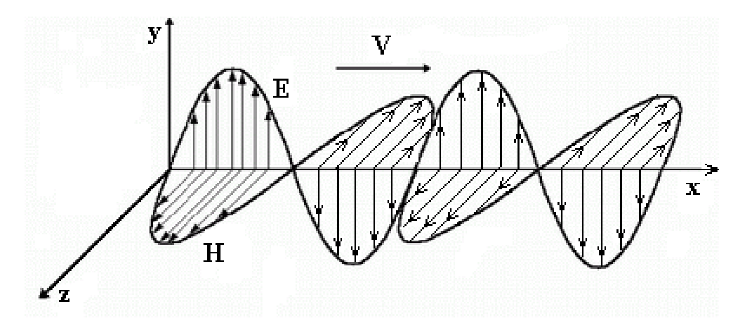


Рис. 5.1.

2. волны *поляризованы,* т.к. изменяющееся магнитное поле перпендикулярно индуцированному им электрическому (магнитное поле сохраняет свою ориентацию в пространстве);

3. в бегущей электромагнитной волне электрическая энергия в любой момент равна магнитной; мгновенные значения электрической и магнитной составляющих этой величины определяются соотношениями:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} . \quad (5.5)$$

4. плотность потока энергии, переносимой волной, равен:

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right]. \quad (5.6)$$

(*Потоком энергии* называют физическую величину, определяемую средней мощностью излучения за время, которое значительно превышает период колебаний электромагнитной волны. Вектор $\vec{S}$ называют *вектором Умова- Пойтинга*).

5. Если волна распространяется в среде, характеризующейся постоянными $\varepsilon$ и $\mu$, то скорость электромагнитной волны определяется свойствами среды:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}} = \frac{c}{n} , \quad (5.7)$$

где $n-$показатель преломления среды относительно вакуума:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} . \quad (5.7)$$

*Свет* представляет собой электромагнитные волны.

6. *Плотность импульса* электромагнитного поля (величина, численно равная импульсу поля в единице объема) равна:

$$\vec{G} = \frac{\vec{S}}{c^2}. \quad (5.8)$$

До Максвелла электростатика, магнитостатика и оптика были по существу тремя никак не связанными между собой областями физики. После появления уравнений Максвелла все эти три несвязанные между собой области стали единой физической науки - классической электродинамики Максвелла.

Открытие Максвеллом возможности существования электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света, было экспериментально подтверждено опытами Г. Герца (1887 г.).

# Глава 6. Электромагнитные колебания

В электрических цепях, так же как и в механических системах, таких как груз на пружине или маятник, могут возникать колебания. *Электромагнитными колебаниями* называют периодические взаимосвязанные изменения заряда, силы тока и напряжения.

## 6.1 Свободные электромагнитные колебания

Свободными колебаниями называют такие колебания, которые совершаются без внешнего воздействия за счет первоначально накопленной энергии.

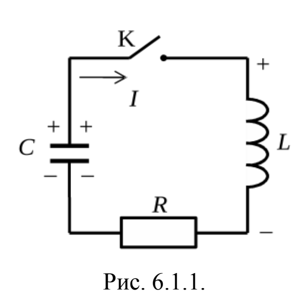


Рис. 6.1.1.

Простейшей системой, в которой могут возникнуть к электромагнитные колебания, является колебательный контур. *Колебательный контур* представляет собой электрическую цепь, содержащую катушку индуктивности *L*, конденсатор *C* и сопротивление *R* (Рис. 6.1.1.). Если *R*=0, то контур называется *идеальным*.

В начальный момент времени (перед тем как замкнуть ключ ), на обкладках конденсатора заряд $q_0$, вся энергия была сосредоточена в электрическом поле конденсатора:

$$W_e = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Если цепь замкнуть, то по цепи потечет ток *I*, величина которого будет изменяться во времени:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Ток, протекающий по цепи, будет создавать в соленоиде магнитное поле, энергия которого равна:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2.$$

Конденсатор в колебательном контуре можно рассматривать как источник электрической энергии с ЭДС:

$$\varepsilon = -\frac{q}{C}. \quad (6.1)$$

Изменяющийся во времени ток будет приведет к появлению в цепи ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_{si} = -L\frac{dI}{dt}. \quad (6.2)$$

Согласно второму правилу Кирхгофа (2.21) для колебательного контура можно записать:

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_{si}. \quad (6.3)$$

С учетом (6.1) и (6.2) выражение (6.1.3) примет вид:

$$IR + \frac{q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0. \quad (6.4)$$

Учитывая (2.1) выражение (6.4) можно переписать в виде:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

или

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (6.5)$$

Выражение (6.5) называют уравнением свободных затухающих колебаний.

Величина:

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad (6.6)$$

где $\beta$ – коэффициент затухания.

$$\frac{1}{CL} = \omega_0^2, \quad (6.7)$$

где $\omega_0$ – собственная частота колебательно контура.

Решение уравнения (6.15) имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t}\cos\omega t, \quad (6.8)$$

где $\omega$ – частота затухающих колебаний:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (6.9)$$

Период затухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (6.10)$$

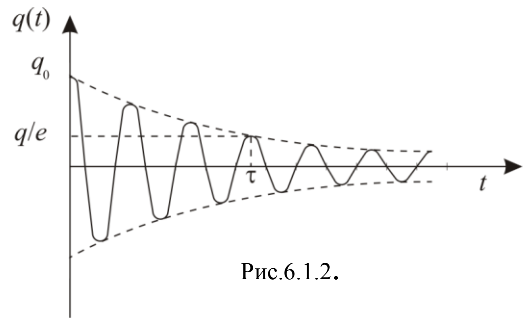


Рис.6.1.2.

Так как в контуре есть сопротивление, то энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется на нагревание сопротивления, вследствие чего колебания затухают. Время $\tau$, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e$ раз, называется *временем релаксации*.

Добротностью $Q$ колебательного контура называется умноженное на $2\pi$ отношение энергии, запасенной в контуре, к убыли этой энергии за один период:

$$Q = 2\pi\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi}{\lambda}, \quad (6.11)$$

где $\lambda$- *логарифмический декремент затухания.* Логарифмическим декрементом затухания называется логарифм отношения амплитуд, т.е. амплитуд, разделенных по времени на один период:

$$\lambda = \ln\left(\frac{q_0 e^{-\beta t}}{q_0 e^{-\beta(t+T)}}\right) = \beta T\ , \tag{6.12}$$

При малом коэффициенте затухания:

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\ , \tag{6.13}$$

Напряжение на конденсаторе с течением времени будет меняться по закону:

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos \omega t = U_0 e^{-\beta t} \cos \omega t\ , \tag{6.14}$$

Ток в контуре с течение времени меняется по закону:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega e^{-\beta t} \cos(\omega t + \delta), \tag{6.15}$$

где

$$\delta = arctg\left(-\frac{\omega}{\beta}\right), \tag{6.16}$$

Если контур идеален (сопротивление $R$=0), то уравнение свободных колебаний (6.5) примет вид:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0\ . \tag{6.17}$$

Выражение (6.17) называют *уравнением свободных незатухающих колебаний*. Решение данного уравнения имеет вид:

$$q = q_0 \cos \omega_0 t\ . \tag{6.18}$$

Период незатухающих колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{CL}\ , \tag{6.19}$$

Выражение (6.1.19) носит название формулы Томсона.

Напряжение на конденсаторе с течением времени будет меняться по закону:

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos \omega_0 t = U_0 \cos \omega_0 t\ , \tag{6.20}$$

где $U_0 = \dfrac{q_0}{C}$ – амплитуда напряжения.

Ток в контуре с течение времени меняется по закону:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = q_0 \omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{6.21}$$

где $I_0$ – амплитуда силы тока:

$$I_0 = q_0 \omega_0 = C U_0 \omega_0 = \frac{C U_0}{\sqrt{CL}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}\ . \tag{6.22}$$

Величина $\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ называется волновым сопротивлением.

При свободных колебаниях в колебательном контуре происходит периодическое преобразование энергии электрического поля конденсатора:

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C}\cos^2\omega_0 t = \frac{q_0^2}{4C}\left(1+\cos 2\omega_0 t\right), \tag{6.23}$$

в энергию магнитного поля соленоида

$$W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}\sin^2\omega t = \frac{LI_0^2}{4}\left(1-\cos 2\omega t\right), \tag{6.24}$$

с сохранением энергии контура:

$$W_e(t)+W_m(t)=const\,, \tag{6.25}$$

## 6.2 Вынужденные электромагнитные колебания

Свободные электромагнитные колебания происходят с частотой, определяемой параметрами контура (емкостью, индуктивностью, сопротивление) и с течением времени затухают из-за потерь энергии. Для получения незатухающих колебаний необходимо восполнять потери энергии. Этого можно добиться, если в контур ввести источник с э.д.с., периодически меняющуюся с течением времени по гармоническому закону.

В этом случае в контуре возникнут электромагнитные колебания, которые происходят под действием периодически изменяющейся эдс. Такие колебания называют *вынужденными электромагнитными колебаниями.*

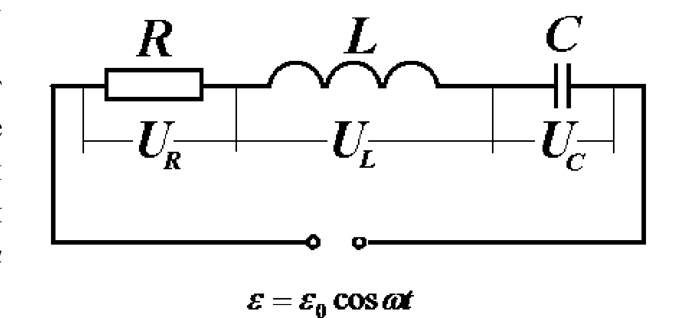



Рис. 6.2.1.

Рассмотрим контур (Рис. 6.2.1), подключенный к внешнему генератору с отличной от нуля периодической э.д.с.:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\omega t\,, \tag{6.26}$$

где $\varepsilon_0$– амплитуда э.д.с.; $\omega$– циклическая частота вынуждающей э.д.с.

Согласно второму правилу Кирхгофа (2.21) для колебательного контура можно записать:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon + \varepsilon_{\text{si}}\,, \tag{6.27}$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов обкладок конденсатора, а внутренним сопротивлением источника электрической энергии можно пренебречь.

С учетом (6.1) и (6.2), (6.26) выражение (6.2.2) примет вид:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 - L\frac{dI}{dt} + \varepsilon\,. \tag{6.28}$$

Принимая во внимание (2.1), (6.6), (6.7), (6.26) выражение (6.28) можно представить в виде:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{1}{L}\varepsilon\cos\omega t\,. \tag{6.29}$$

Решение уравнения (6.2.4):

$$q(t) = q_0\cos(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{6.30}$$

где $q_0$ – амплитуда колебаний, $\varphi_0$ – начальная фаза колебаний.

Амплитуда и начальная фаза могут быть найдены по формулам:

$$q_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{6.31}$$

$$\mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{R}{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}, \tag{6.32}$$

Вынужденные колебания совершаются с такой же частотой, что и вынуждающая э.д.с.. Сила тока установившихся вынужденных колебаниях:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = I_0\cos(\omega t - \varphi), \tag{6.33}$$

где $I_0 = q_0\omega$ – амплитуда тока и $-\varphi = \varphi_0 + \pi/2$ – начальная фаза могут быть найдены по формулам:

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{6.34}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \tag{6.35}$$

Амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает при выполнении условия:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}} = \omega_0. \tag{6.36}$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний называется *электрическим резонансом*, а выражение (6.36) называется условием резонанса. Резонансная циклическая частота соответствует собственной частоте колебательного контура и не зависит от *R*.

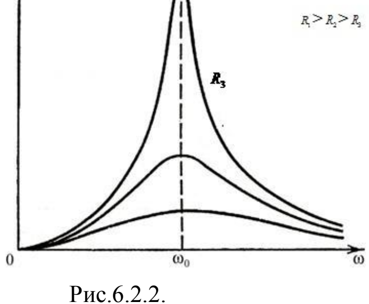


Рис.6.2.2.

Амплитуда при резонансе равна:

$$I_0(\omega_p) = \frac{\varepsilon_0}{R}. \tag{6.37}$$

Сдвиг фаз между током и э.д.с. равен:

$$\varphi(\omega_p) = 0, \tag{6.38}$$

## 6.3 Переменный электрический ток

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание в цепи, обладающей емкостью, индуктивностью, сопротивлением переменного тока.

Появление в цепях переменного тока катушек и конденсаторов кардинально меняет их свойства цепей. Это проявляется во-первых, в рассогласовании колебаний тока и напряжения; во-вторых, в реактивном характере потребления энергии (и катушка и конденсатор, забирая энергию у источника тока, возвращают ее затем ему обратно).

Для последовательной RCL цепи (Рис. 6.1.1) применения второго правила Кирхгофа приводит выражению:

$$u_C + u_R + u_L = u = \varepsilon_0 \cos \omega t . \tag{6.39}$$

Напряжение на конденсаторе:

$$u_C = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{C} = U_{0C} \cos\left( \omega t - \varphi - \frac{\pi}{2} \right). \tag{6.40}$$

Амплитуда колебаний напряжения:

$$U_{0C} = I_0 X_C , \tag{6.41}$$

где $X_C$ – емкостное сопротивление переменному току. Из (6.23):

$$X_C = \frac{1}{\omega C} , \tag{6.42}$$

Напряжение на катушке индуктивности:

$$u_L = L \frac{dq}{dt} = U_{0L} \cos\left( \omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} \right), \tag{6.43}$$

Амплитуда колебаний напряжения:

$$U_{0L} = I_0 X_L , \tag{6.44}$$

где $X_L$ – сопротивление катушки индуктивности переменному току:

$$X_L = \omega L , \tag{6.45}$$

Напряжение на резисторе:

$$u_R = IR = U_{0_R} \cos(\omega t - \varphi), \tag{6.46}$$

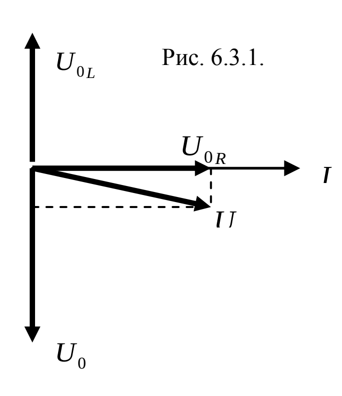


Рис. 6.3.1.

Колебания $u_R$ происходят в одной фазе с колебаниями тока в цепи, $u_L$ опережает ток по фазе на π/2, а $u_C$ отстает от тока по фазе на π/2.

Учет фаз можно осуществить через построение векторов. В последовательной цепи квазистационарного переменного тока сила тока $I$ в каждый момент времени во всех участках цепи одинакова.

Для амплитудных значений напряжений :

$$U_0 = \sqrt{\left(U_{0_R}\right)^2 + \left(U_{0_C} - U_{0_L}\right)^2} , \tag{6.47}$$

Учитывая (6.41), (6.44):

$$U_0 = I_0 \sqrt{(R)^2 + \left(X_c - X_L\right)^2} = I_0 \sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2} = I_0 Z , \tag{6.48}$$

где *Z*- полное сопротивление цепи.

Величина $X = X_C - X_L$ называется *реактивным сопротивлением цепи*, а *R* называется *активным сопротивлением цепи*.

Среднее за период значение мгновенной мощности называется *активной мощностью* тока в электрической цепи:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T N dt = \frac{1}{2} I_0 \varepsilon_0 \cos \varphi , \tag{6.50}$$

где $\cos \varphi$ – коэффициент мощности, он может быть выражен как:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} . \tag{6.51}$$

*Действующим* значением периодического тока (э.д.с., напряжения и т.п.) называется среднее квадратичное значение тока (э.д.с., напряжения и т.п.) за период ***T*** его изменения:

$$I_{\partial} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2 dt} . \qquad (6.52)$$

Для синусоидальных электромагнитных колебаний действующие значения силы ток и напряжения равны:

$$I_{\partial} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}, \qquad (6.53)$$

$$U_{\partial} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \qquad (6.54)$$

Если реактивное сопротивление $X = X_C - X_L = 0$ , то в цепи наступает резонанс, и в цепи выделяется максимальная активная мощность.

# <u>Глава 7.</u> Свет как электромагнитные волны

Световое излучение воспринимается глазом человека. Из теории М. Максвелла следует, что свет-это электромагнитные волны. Свет представляет собой свободно распространяющиеся в пространстве колебания электрического и магнитного полей в диапазоне длин волн примерно от 350 до 720 нм .

Специфика оптического диапазона заключается в двух особенностях:

1. в оптическом диапазоне выполняются законы геометрической оптики,
2. в оптическом диапазоне свет очень слабо взаимодействует с веществом.

*Волновая оптика* – раздел оптики, объясняющий оптические явления на основе волновой природы света. Волновая оптика описывает такие оптические явления, как интерференция, дифракция, поляризация, дисперсия.

Основное положение волновой оптики- *принцип Гюйгенса,* согласно которому каждая точка пространства, вовлечённая в волновой процесс, сама становится источником сферических волн, которые распространяющиеся во все стороны от каждой точки волнового возмущения, и называются *вторичными волнами*. Френель дополнил принцип Гюйгенса положением: вторичные волны интерферируют друг с другом, и наблюдаемый волновой процесс есть результат интерференции вторичных волн. Модифицированный Френелем принцип Гюйгенса с тех пор называется *принципом Гюйгенса–Френеля*.

## 7.1. Интерференция света

*Интерференция* – это взаимодействие волн, в результате которого возникает устойчивая интерференционная картина, то есть не зависящее от времени распределение амплитуд результирующих колебаний в точках области, где волны накладываются друг на друга. Интерференция- одно из наиболее убедительных доказательств волновых свойств.

Если две волны накладываются друг на друга в определённой области пространства, то они порождают новый волновой процесс. Конечно, принцип суперпозиции справедлив для любого количества накладывающихся волн. Результирующее колебание в данной точке всегда равно сумме колебаний, создаваемых каждой волной по отдельности.

При наложении двух монохроматических волн

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) \quad \text{и} \quad x_2 = A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

в некой из точек пространства происходит сложение колебаний, при котором амплитуда результирующего колебания определяется выражением:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\cos((\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (7.1)$$

а интенсивность

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos((\omega_1-\omega_2)t+(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (7.2)$$

В общем случае ($\omega_1 \neq \omega_2$) разность фаз постоянно меняется, меняется и $I = I_1 + I_2$ во всех точках пространства.

Если две складываемые волны имеют одинаковую частоту, то разность фаз не зависит от времени, и $I = I_1 + I_2$ остается постоянной. В этом случае говорят о когерентности - согласованном протекании во времени и пространстве волновых процессов.

Два источника называются *когерентными*, если они имеют одинаковую частоту и постоянную, не зависящую от времени разность фаз. Волны, возбуждаемые такими источниками, также называются когерентными.

Говоря об интерференции света, следует иметь в виду следующее:

**1.** Период колебаний электромагнитного поля в световой волне является столь малым, что наблюдать и измерять мы можем лишь усреднённое значение интенсивности света.

**2.** Два независимых источника света всегда будут некогерентными, даже если они излучают свет одинаковой длины волны.

*Интерференционная картина* представляет собой фиксированное, не зависящее от времени распределение амплитуд колебаний. Как было уже показано, для наблюдения интерференции света необходимо иметь когерентные световые пучки, для чего применяются различные приёмы. В опыте Юнга когерентные пучки получены разделением и последующим сведением световых лучей, исходящих из одного и того же источника.

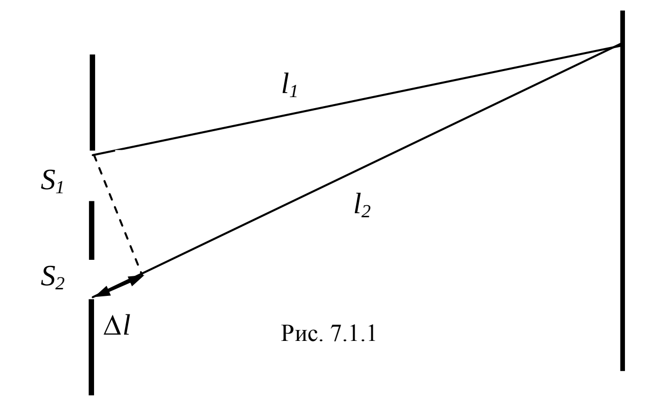


Рис. 7.1.1

Свет от источника *S*, прошедший через узкую щель в экране, падет на экран с двумя щелями $S_1$ и $S_2$, расположенными достаточно близко друг к другу на расстоянии *d*. Эти щели являются когерентными источниками света. Интерференция наблюдается в области, в которой перекрываются волны от этих источников. На экране наблюдается чередование полос с максимумом и минимумом интенсивности света.

Величина $\Delta l = |l_2 - l_1|$ называется *разность хода волн* и имеет важное значение¸ от нее зависит амплитуда результирующих колебаний в конкретной точке.

*Условие максимума*: при наложении когерентных волн колебания в данной точке будут иметь максимальную амплитуду, если разность хода равна целому числу длин волн*:*

$$\Delta l = n\lambda, \; n = 0,1,2... \qquad (7.3)$$

*Условие минимума* Когерентные волны, складываясь, гасят друг друга, если разность хода равна полуцелому числу длин волн*:*

$$\Delta l = n\lambda + \frac{\lambda}{2},\ n = 0,1,2... \qquad (7.4)$$

Если разность хода принимает какое-то иное значение, не равное целому или полуцелому числу длин волн, тогда волны, приходящие в данную точку, создают в ней колебания с некоторой промежуточной амплитудой.

Существует много ситуаций, когда можно наблюдать интерференцию световых лучей. Один из них - -интерференция в тонких пленках. Т. Юнг первым пришел к мысли о возможности объяснения цветов тонких пленок сложением волн, одна из которых отражается от наружной поверхности пленки, другая – от внутренней (Рис. 7.1.2.). Результат интерференции зависит от угла падения света на пленку, ее толщины и длины волны света. Усиление произойдет в том случае, если преломленная волна отстанет от отраженной на целое число длин волн. Если же вторая волна отстанет на половину волны или на нечетное число полуволн, то произойдет ослабление света.

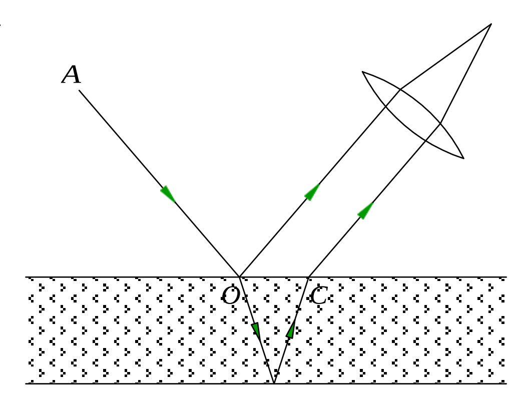


Рис. 7.1.2.

Из-за того, что разность хода зависит от длины волны, максимумы интерференционной картины для разных длин волн получаются в разных точках. Именно поэтому пленки имеют радужную окраску.

Аналогично возникают и кольца Ньютона в установке, состоящей из плоскопараллельной пластины и выпуклой линзы. Падающий луч расщепляется на два луча 1 и 2, отражённых соответственно от сферической поверхности линзы и от пластины; между этими лучами возникает разность хода, и они интерферируют между собой.

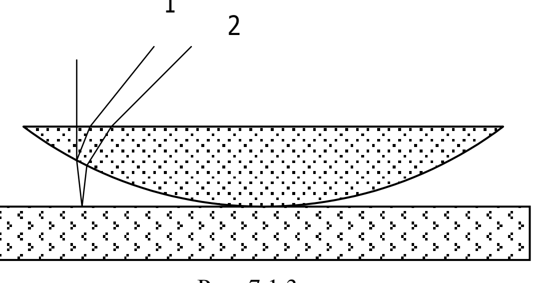


Рис. 7.1.3.

Интерференционная картина в данной случае будет представлять совокупность темных и светлых концентрических колец, если кольца освещаются монохроматическим светом.

Если $R$ – радиус кривизны линзы; $r$ – расстояние до точки наблюдения от центра кольцевой интерференционной картины, который находится в точке касания; $n$ – показатель преломления среды, в которую помещена установка, то радиусы темных и светлых колец определяются по формулам:

$$r_{темн} = \sqrt{mR\lambda_0}, \qquad (7.5)$$

$$r_{свет} = \sqrt{\frac{(2m+1)R\lambda_0}{2}}, \qquad (7.6)$$

где $m$- номер кольца. Если освещать установку белым светом, то кольца будут спектрально окрашены.

Явление интерференции используется для просветления оптики. Чтобы избежать потери энергии при отражении с в сложных оптических системах, состоящих из нескольких линз, поверхность линзы покрывают тонкой пленкой, толщины которой выбирается таким образом, чтобы в отраженном свете возник интерференционный минимум. Таким образом, через линзу пройдет больше света, чем без пленки. пленки.

## 7.2 Дифракция света

*Дифракцией света* называют совокупность явлений которые обусловлены волновой природой света и наблюдаются при его распространении в среде с резко выраженными неоднородностями (напр. при прохождении через отверстия, вблизи границ непрозрачных тел и т. д.).

Различают два вида дифракции:

1. Дифракция по Френелю (дифракция в расходящихся лучах). При ***дифракции Френеля*** на препятствие падает плоская или сферическая волна, дифракционная картина наблюдается на экране позади препятствия на конечном расстоянии от него.

2. Дифракция по Фраунгоферу (в параллельных лучах). При дифракции Фраунгофера на препятствие падает плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся в фокальной плоскости собирающей линзы.

Рассмотрим случай дифракции Френеля на круглом отверстии. Согласно принципу Гюйгенса–Френеля каждая точка волновой поверхности служит источником вторичных сферических волн. Вторичные волны когерентны, так как исходят из одного источника. Волновой процесс в окружающем пространстве есть результат интерференции вторичных волн. Принцип Гюйгенса–Френеля выражает важную физическую идею: волна, удалившись от своего источника, никак от этого источника не зависит.

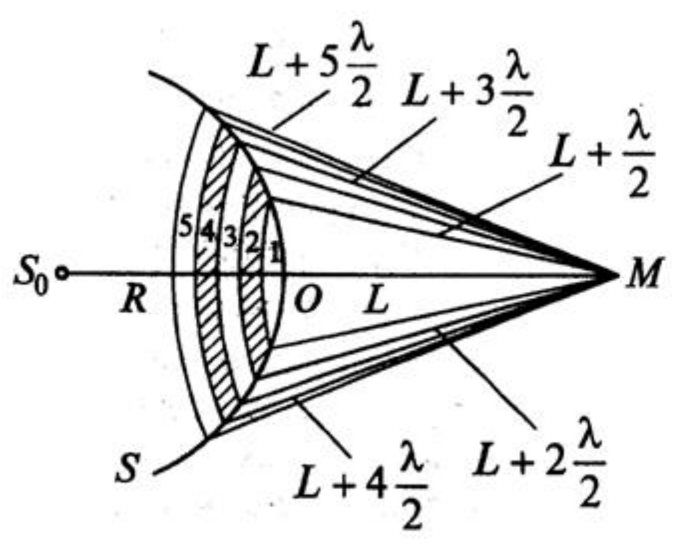


Рис.7.2.1.

При расчете амплитуды колебаний, возбуждаемых источником $S_0$ в произвольной точке *M*, источник $S_0$ можно заменить эквивалентной ему системой вторичных источников – малых участков любой замкнутой поверхности S, охватывающей источник $S_0$ и не охватывающей точку наблюдения M. Вторичные источники когерентны.

Амплитуда *dA* колебаний, возбуждаемых в точке *M* вторичным источником, пропорциональна отношению площади соответствующего участка *ds* волновой поверхности *S* к расстоянию *r* от него до точки *M* и зависит от угла *α* между внешней нормалью к волновой поверхности и направлением от элемента *ds* в точку *M*

$$dA = f(\alpha)\frac{ads}{r}, \tag{7.7}$$

где *a* – величина, пропорциональная амплитуде первичной волны в точках элемента *ds*.

Выберем в качестве вспомогательной поверхности S сферическую поверхность радиуса *R* так, чтобы расстояние *L* от этой поверхности до точки наблюдения было порядка *R*, и разобьем эту поверхность на небольшие по площади кольцевые участки (*зоны Френеля*) так, чтобы разность хода от аналогичных точек этих участков до точки наблюдения была равна λ/2.

Амплитуда результирующих колебаний в точке М равна сумме амплитуд колебаний от вторичных источников:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots, \tag{7.8}$$

При $i << L/\lambda$ площади всех зон очень малы, одинаковы и равны:

$$\delta_i = \pi \lambda RL / (R + L). \tag{7.9}$$

По мере удаления зоны от источника увеличивается и расстояние $r_i$ от зоны до точки $M$ и угол $\alpha_i$ между нормалью к поверхности зоны и направлением в точку $M$, а потому амплитуды колебаний убывают:

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > \dots. \tag{7.10}$$

При этом соотношение амплитуд соседних зон:

$$A_i = (A_{i-1} + A_{i+1})/2. \tag{7.11}$$

В частности:

$$A \approx A_1/2. \tag{7.12}$$

Если на пути света поставить экран, закрывающий все зоны Френеля, кроме первой, то $A=A_1$.. Если для точки ***O*** в отверстии укладывается четное число $2k$ зон Френеля, то в точке ***O*** находится темное пятно:

$$A \approx (A_1 - A_{2k})/2 < A_1/2. \tag{7.13}$$

Если для точки ***O*** в отверстии укладывается нечетное число $2k+1$ зон Френеля, то в точке ***O*** находится светлое пятно:

$$A \approx (A_1 + A_{2k+1})/2 > A_1/2. \tag{7.14}$$

Если отверстие освещается белым светом, то на экране наблюдается система цветных колец.

При дифракции Френеля на небольшом круглом диске в монохроматическом свете на экране наблюдается система чередующихся темных и светлых интерференционных колец с общим центром в точке О, где всегда находится интерференционный максимум (*пятно Пуассона*).

При дифракции Фраунгофера на узкой длинной щели в непрозрачном препятствии на экране наблюдается система дифракционных полос.

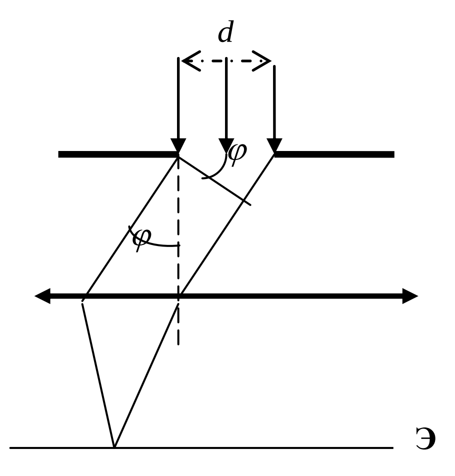


Рис. 7.2.2.

Параллельные лучи, идущие от краев щели под углом дифракции $\varphi$ к направлению падающего света, собираются линзой в точке фокальной плоскости.

Результат интерференции в точке зависит от разности хода $\Delta l = d \sin \varphi$ и длины волны λ.

Разобьем щель по ширине разбить на зоны Френеля в виде полосок, разность хода от краев которых равна 0,5λ.

Если число зон Френеля четное, то в точке будет наблюдаться дифракционный минимум; если число зон окажется нечетным, то в точке будет дифракционный максимум.

Дифракционная решётка — это оптический прибор, позволяющий получать разложение света на спектральные составляющие и измерять длины волн. Дифракционные решётки бывают прозрачными и отражательными.

Рассмотрим прозрачную дифракционную решётку. Она представляет собой периодическую структуру, состоящую из большого числа очень узких щелей, разделенных непрозрачными промежутками.

Расстояние *d*, через которое повторяются штрихи на решётке, называют *периодом* дифракционной решётки. (Рис.7.2.3). .

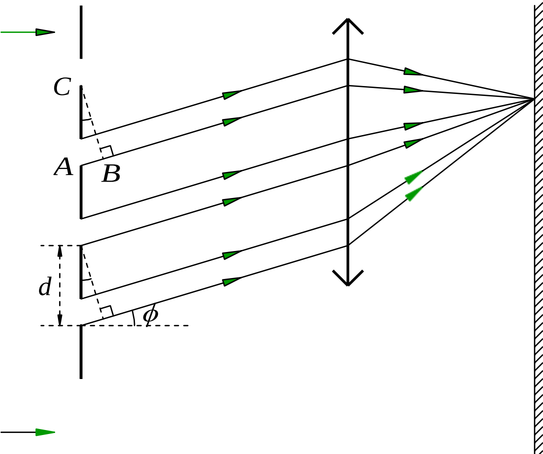



Рис.7.2.3.

На решетку нормально падает монохроматическая плоская волна. Параллельно решетке расположена собирающая линза, а в ее фокальной плоскости – экран. Каждая из параллельных щелей решётки дает на экране дифракционную картину (Рис. 7.2.3). Линза L собирает параллельные когерентные лучи, идущие от всех щелей под углом $\varphi$ к главной оптической оси, в одну и ту же точку фокальной плоскости. При параллельности всех щелей дифракционной решетки и строгой одинаковости их размеров амплитуды колебаний, создаваемых в точке М каждой щелью в отдельности, будут одинаковы. Практически одинаковым будет и распределение вдоль экрана интенсивностей и амплитуд колебаний, приходящих от каждой щели. Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции большого числа волн, идущих от всех щелей.

Резкое возрастание амплитуды результирующего колебания наблюдается в тех случаях, когда амплитуды колебаний от всех щелей имеют сдвиг фазы кратный $2\pi$, что соответствует разности хода между соседними щелями кратной четному числу полуволн:

$$d \sin\varphi = k\lambda . \qquad (7.15)$$

Условие (7.12) характеризует положение главных максимумов дифракционной решетки, его называют уравнением дифракционной решетки.

Основными характеристиками дифракционной решетки являются угловая дисперсия и разрешающая способность.

*Угловой дисперсией D* называется угловое расстояние между двумя линиями, отнесенное к разности длин волн:

$$D = \delta\varphi / \delta\lambda . \qquad (7.16)$$

Величину угловой дисперсии можно вычислить и з уравнения дифракционной решетки:

$$D = \frac{m}{d\cos\varphi} . \qquad (7.17)$$

*Разрешающей способностью* называют безразмерную величину:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} , \qquad (7.18)$$

где $\Delta\lambda$ - значение минимальной разности длин волн двух соседних линий спектра, которые еще регистрируются раздельно.

## 7.3 Поляризация света

Электромагнитная волна поперечна. Колеблющиеся в ней векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны друг другу и направлению распространения волны.

Свет, испускаемый обычными источниками излучения, представляет собой множество квантов, в каждом из которых $\vec{E}$ направлен в произвольном направлении, перпендикулярном направлению распространения луча. Такой свет называется *естественным* или *неполяризованным* (Рис. 7.3.1).

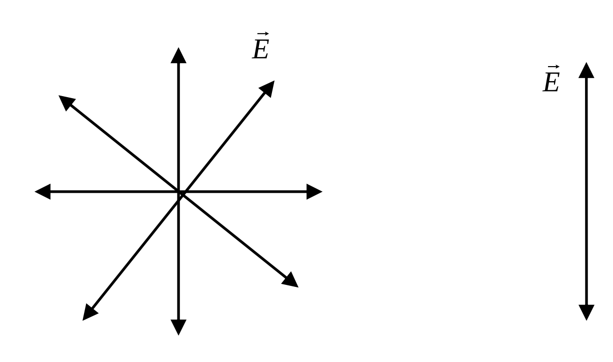



Рис.7.3.1. Рис.7.3.2.

Свет, в котором направление колебаний вектора $\vec{E}$ упорядочено каким-либо образом, называется поляризованным.Если колебания светового вектора происходят в одной плоскости, то такой свет называется плоско поляризованным (Рис. 7.3.2).

*Поляризацией* называется выделение линейно поляризованного света из естественного или частично поляризованного света.

Причины поляризации света могут быть различными, но наиболее часто поляризация происходит в трех случаях:

а) при прохождении света через некоторые кристаллы (например, турмалин);

б) при отражении и преломлении света на границе раздела двух диэлектриков;

в) при двойном лучепреломлении света.

Устройства, позволяющие выделять линейно поляризованный свет из естественного или частично поляризованного света, называются *поляризаторами.* Их действие основано на поляризации света при его отражении или преломлении на границе раздела двух сред.

Эти же устройства можно использовать в качестве *анализаторов* – устройств, позволяющих определить характер и степень поляризации.

Степенью поляризации называется величина:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \tag{7.19}$$

где $I_{max}$ *и* $I_{min}$ – соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

Через поляризатор (например, пластинку турмалина) неполяризованная электромагнитная волна с интенсивностью $I_0$. Интенсивность прошедшей первый поляроид волны будет в два раза меньше интенсивности волны:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 . \tag{7.20}$$

Рис. 7.3.3.

Интенсивность волны, прошедшей второй поляризатор, может быть определена из соотношения, называемого *законом Малюса для неполяризованной электромагнитной волны:*

$$I = I_1 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \varphi . \tag{7.21}$$

Как уже отмечалось, свет поляризиуется при отраждении  света. Если свет падает под углом Брюстера, то он при отраджении поляризуется полностью

Угол Брюстера $\alpha_Б$ - это угол, удовлетворяющем условию:

$$tg\alpha_Б = n_{12}, \qquad (7.22)$$

где $n_{12}$ – относительный показатель преломления среды, отражающей свет.

Свет может поляризоваться и при преломлении. Большинство кристаллов оптически анизотропно – их относительная диэлектрическая проницаемость и показатель преломления зависят от направления электрического вектора световой волны. Это приводит к возникновению явления, называемого *двойным лучепреломлением*.

Рис. 7.3.4.

При двойном лучепреломлении луч, падающий на поверхность кристалла, раздваивается в нем на два преломленных луча (Рис. 7.3.4). Луч 1- обыкновеный, луч 2- необыкновеный.

Вышедшие из кристалла лучи плоскополяризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях: обыкновенный луч в плоскости, перпендикулярной главному сечению кристалла, необыкновенный луч — в главной плоскости. Обыкновенный луч подчиняется закону преломления, а для необыкновенного луча этот закон не выполняется: показатель преломления необыкновенного луча является переменной величиной, зависящей от угла падения.

## 7.4. Дисперсия света

Пусть солнечный луч переходит из воздуха в прозрачную среду (например, воду или стекло). Если угол падения $\alpha$ не равен нулю, то, угол преломления $\beta$ определяется из закона преломления:

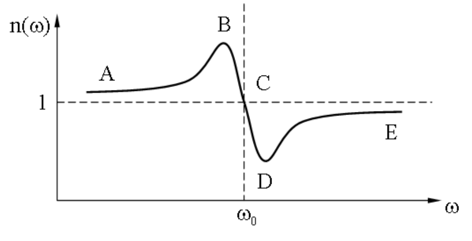
Величина $n$, называемая показателем преломления, характеризует среду и от угла падения не зависит.

Оказывается, однако, что среда по-разному реагирует на прохождение электромагнитных волн различных частот. Имеет место *дисперсия - зависимость показателя преломления среды от частоты света*.

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму. Первые экспериментальные наблюдения дисперсии света проводил в 1672 г. И. Ньютон. Он объяснил это явление различием масс корпускул.

Рассматривая взаимодействие света со средой, без учета поглощения, можно найти значение коэффициента преломления среды:

$$n = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}}, \qquad (7.23)$$




$N$ – количество атомов, $e$ – заряд электрона, $m$- его масса, $\omega_0$ – собственная частота электронов, $\omega$ – частота падающей электромагнитной волны.

Зависимость коэффициента преломления от частоты зависимости (7.23) представлено на графике.

## 7.5 Геометрическая оптика предельный  случай волновой оптики

Длины световых волн очень малы (порядка $10^{-7}$м), поэтому видимый свет можно рассматривать, отвлекаясь от его волновой природы и полагая, что свет распространяется вдоль некоторых линий, называемых лучами. Раздел оптики, в котором пренебрегают конечностью длин волн ($\lambda \to 0$) называется *геометрической оптикой*.

В основу геометрической оптики положено понятие светового луча и световой пучок. *Световой луч*- это линия указывающая направление распространения света. *Световой пучок* –это это область пространства, в пределах которой распространяется свет.

*Основные законы геометрической оптики*:

1) Закон прямолинейного распространения света: свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно. Доказательством этого закона является наличие тени с резкими границами от непрозрачных предметов при освещении их точечными источниками света (источники, размеры которых значительно меньше освещаемого предмета и расстояния от него). Этот закон нарушается при прохождении света через малые отверстия или освещении малых преград.

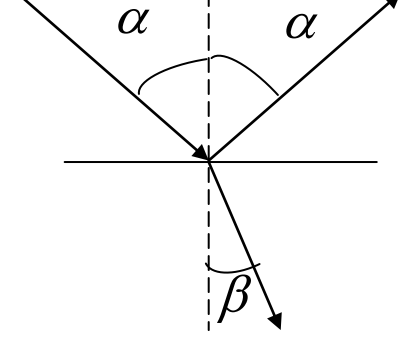


Рис. 7.5.1

2) Закон независимости светового луча: лучи при пересечении не изменяют друг друга. Пересечение лучей не мешает каждому из них распространяться независимо друг от друга. Этот закон справедлив лишь при небольших интенсивностях света. При интенсивностях, достигаемых с помощью лазеров, независимость световых лучей нарушается.

3) Закон отражения на границе раздела двух сред, лежат в одной плоскости; при этом угол падения равен углу отражения.

4) Закон  преломления света: луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр восстановленный в точку падения луча на границе раздела двух  сред, лежат в одной плоскости; при этом отношению синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных дух сред равная относительному показателю преломления двух сред:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}. \quad (7.24)$$

Абсолютный показатель преломления показывает во сколько раз скорость света в вакууме *c* больше скорости света в веществе *v:*

$$n = \frac{c}{v}. \quad (7.25)$$

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления в двух средах:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (7.26)$$

П. Ферма (1660г.) сформулировал принцип, который является обобщением законов геометрической оптики. Принцип Ферма гласит: свет распространяется по такому пути, для прохождения которого ему требуется минимальное время.

Если свет распространяется из среды с большим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления ($n_2 > n_1$), то то угол преломления больше угла падения:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} > 1. \qquad (7.27)$$

С увеличением угла падения увеличивается и преломленный угол до тех пор, пока при некотором угле падения $\alpha_{предел}$(*предельном* угле падения) угол преломления не окажется равным $90^0$. Преломленный луч при этом скользит вдоль раздела сред. При углах падения $\alpha > \alpha_{предел}$ весь падающий свет полностью отражается в первую среду. Это явление называется полным отражением. Из (7.24) следует:

$$\sin\alpha_{предел} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \qquad (7.28)$$

Свойство полного отражения используется в различных оптических приборах для поворота лучей и пр.

# Часть IV. Квантовая физика.

## Глава 1. Корпускулярно–волновой дуализм.

### 1.1. Фотоэффект

На рубеже XIX-XX столетий исследование ряда физических явлений с участием электромагнитного излучения показало, что в некоторых случаях поведение излучения, и в частности света, не следовало общепринятым на то время законам классической физики. Полученные экспериментальные результаты противоречили волновой природе света.

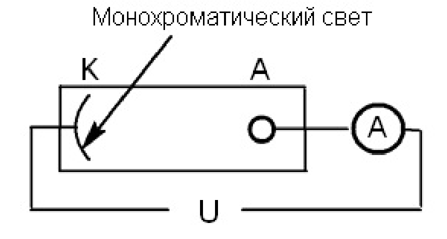



Рис. 1.1.

Рассмотрим некоторые наиболее значимые эксперименты и результаты этих экспериментов, которые, в конечном итоге, были положены в основу новой квантовой теории. Данная теория на сегодняшний день является базовой для большого разнообразия физических явлений, которые нашли и находят широкое применение в науке и технических приложениях.

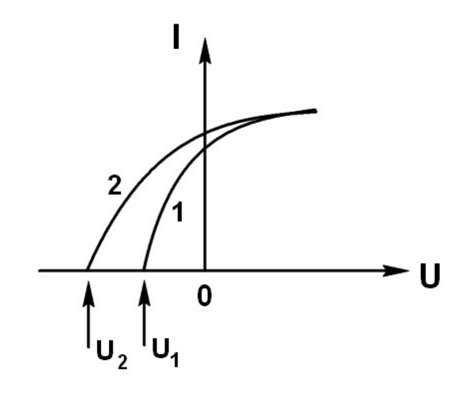



Рис. 1.2.

Фотоэффект относится к тем самым первым эффектам, экспериментальные результаты которых продемонстрировали явное несогласие с принятыми на то время классическими законами. Открытие фотоэлектрического эффекта принадлежит Герцу, который в 1887 г. установил, что при освещении поверхности металла светом с частотой выше определенной величины, в цепи, содержащей облучаемый металл, появляется электрический ток. Однако понимание механизма фотоэффекта и его приписывание к сугубо квантовым явлениям пришло на начало XX столетия.

На рисунке 1.1 схематически показана установка для экспериментального изучения фотоэффекта. Фотоэлемент представляет собой вакуумированный баллон, в котором располагаются два электрода – анод (А) и катод (К). Поверхность катода может освещаться светом через кварцевое окошко. В качестве материала окошка выбран кварц, по причине его широкого спектра пропускания, включая ультрафиолетовый и инфракрасный диапазоны света. Электрическая схема, показанная на рисунке 1.1, позволяет прикладывать к фотоэлементу напряжение $U$ с соответствующей полярностью, которая отсчитывается относительно анода. Напряжение прямой полярности соответствует случаю когда $+U$ источника тока соединен с анодом и соответственно напряжение

Рис. 1.3.

обратной полярности, когда к аноду подключена $-U$ клемма источника тока.

На рисунке 1.2 представлены типичные ВАХ (зависимость тока $I$ от приложенного к фотоэлементу напряжения $U$) соответствующие двум длинам волн света $\lambda_1$ и $\lambda_2$ ($\lambda_2 < \lambda_1$), соответственно. Причем интенсивность света для обоих случаев одинакова $\Phi_1 = \Phi_2$. Из приведенного рисунка 1.2 видно, что с уменьшением длины волны света запирающее (или тормозящее) обратное напряжение (минимальное значение напряжения $U$, при котором ток через фотоэлемент становится равным нулю) увеличивается, т.е. $U_2 > U_1$. Запирающее напряжение определяет кинетическую энергию фотоэлектрона $eU = E_{кинет}$ которую приобретают электроны при вырывании их светом из металла. Поэтому, из приведенных ВАХ, можно сделать вывод, что с уменьшением длины волны света, падающего на поверхность катода, кинетическая энергия электрона увеличивается. Это явное противоречие с классической теорией, согласно которой, энергия электромагнитной волны (света) определяется амплитудой, но не длиной (или частотой) волны и в таком случае, энергия вырванного светом электрона должна зависеть от интенсивности (амплитуды) светового потока.

В другом эксперименте, ВАХ фотоэлемента для прямого и обратного напряжения снимается при разных интенсивностях падающего света $\Phi$, при неизменной длине волны. На рисунке 1.3 приведены ВАХ для двух значений интенсивности света, причем $\Phi_2 > \Phi_1$. Из приведенных на рисунке 1.3 ВАХ следует, что запирающее напряжение одинаково для обоих интенсивностей, а изменяется только ток насыщения (ток через фотоэлемент при больших значениях прямого напряжения). Из выше сказанного следует, что кинетическая энергия электронов, соответствующая этим двум интенсивностям света одинакова, а запирающее напряжение $U$ не зависит от интенсивности падающего на металл излучения. Если поведение токов насыщения вписывается в рамки классической теории, т.к. увеличение (уменьшение) тока насыщения можно связать с увеличением (уменьшением) числа электронов, то неизменность $U$ при разных интенсивностях $\Phi$ не поддается объяснению с позиций классической физики, т.к. энергия световой волны зависит от амплитуды или интенсивности волны, и поэтому энергия электронов и, следовательно, запирающее напряжение для двух интенсивностей должны быть разным.

Для объяснения всех особенностей фотоэффекта необходимо допустить, что электроны вырываются из металла не электромагнитной волной, а некими сгустками (порциями) энергии, величина которой зависит от частоты света согласно выражению:

$$E_\nu = h\nu = \hbar\omega, \tag{1.1}$$

где $h-$ постоянная Планка ($6{,}626176 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot с$).

Заметим, что частота является характеристикой электромагнитной волны (света). В результате акта вырывания электрона из металла у последнего будет кинетическая энергия равная:

$$E_e = E_\nu - A, \tag{1.2}$$

где $A-$работа выхода электрона из метала. Воспользовавшись выражением (1.1) из (1.2) можно получить формулу Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = E_e + A. \tag{1.3}$$

При частоте света $\nu < \nu_0$, где $\nu_0$ – частота красной границы фотоэффекта, энергия падающего излучения недостаточна, что бы вырвать электрон из металла и фотоэффект наблюдаться не будет. Испускание электронов начинается без какого–либо запаздывания по времени при $\nu \geq \nu_0$ даже если интенсивность падающего света очень мала. Независимость времени реакции фотоэффекта от интенсивности излучения также является доказательством, что акт вырывания электрона из металла осуществляется подобно взаимодействию частиц (электрон и фотон), т.е. мгновенно.

## 1.2. Рентгеновское излучение

Первые прототипы рентгеновских трубок представляли собой вакуумные устройства, предназначенные для изучения так называемых катодных лучей – потоков частиц, которые испускаются катодом. Схематически такая рентгеновская трубка показана на рисунке 1.4 и содержит заостренный катод К и кольцевой анод А. При столкновении катодных лучей (пунктирная линия) с поверхностью экрана Э покрытого люминофором происходило свечение последнего в области пятна, где происходит столкновение. Внешними электрическими и магнитными полями можно было управлять траекторией катодных лучей и тем самым изучать свойства этих лучей. В ходе таких исследований было установлено, что катодные лучи приставляют собой поток электронов.

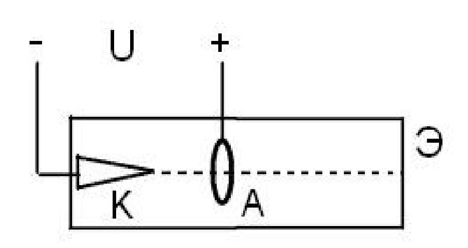



Рис. 1.4.

Рентгеном было открыто, что при подключении высокого напряжения $U$, порядка нескольких десятков тысяч вольт, пятно, где катодные лучи сталкиваются с экраном, становилось источником неизвестного на то время излучения. Этому излучению дали название $X$ – лучи. Оно характеризовалось высокими проникающей и ионизирующей способностями. Понадобилось насколько лет, что бы была установлена природа этого излучения. Это стало возможными благодаря открытию дифракции $X$ – лучей на кристаллах. До этого волновую природу $X$ – лучей установить не могли из-за маленькой длины волны этого вида электромагнитного излучения. Отражение $X$ – лучей (далее рентгеновских лучей) от кристаллов происходит за счет так называемого Бредговского рассеяния. Такой тип рассеяния (отражения) присущ волновым процессам различной природы и наблюдается при когерентном отражение волны от большого количества периодически расположенных рассеивателей излучения при условии, что интенсивность единичного рассеивания очень мала. В результате такого типа отражения наблюдается интерференция волн с их усилением интенсивности в определенном направлении при выполнении так называемого условия Бреггов, которое дается в виде:

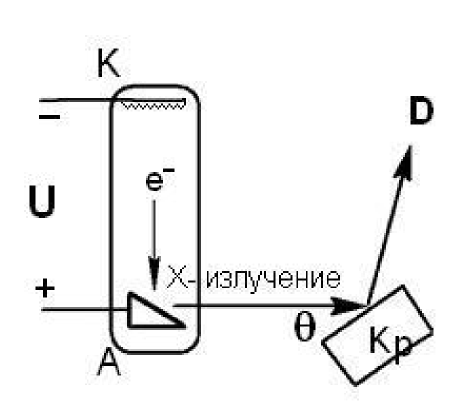



Рис. 1.5.

$$2d \sin\theta = m\lambda. \quad (1.4)$$

где $d-$ период в расположении рассеивающих неоднородностей, $\theta-$угол скольжения между плоскостью кристалла и направлением движения волны, $\lambda-$длина волны, $m-$целые числа $(1, 2, 3,....)$. Применительно к рентгеновскому излучению периодическими расположенными рассеивателями служат периодически расположенные атомные плоскости в кристалле, причем от каждой атомной плоскости отражается очень малая доля интенсивности подающей волны, но из-за чрезвычайно большого их количества, в результате выполнения Брегговского условия (1.4) получается заметная интенсивность отраженной волны.

Факт возможности отражения рентгеновских лучей (не смотря на высокую проникающую способность) от кристаллов при выполнении Брегговского условия, в котором фигурируют угол скольжения и периодичность атомных плоскостей, дало возможность исследовать спектр рентгеновского излучения, который получается при работе рентгеновской трубки в зависимости от разных условий проведения эксперимента.

На рисунке 1.5 схематично представлен эксперимент по определению спектра рентгеновской трубки ($A-$анод, $K-$катод, $D-$детектор излучения (измеряет интенсивность $I$ рентгеновского излучения), $Kp-$ кристалл, $U-$приложенное к трубке напряжение, $\theta-$угол скольжения. Качественно спектр интенсивности рентгеновского излучения $I$ в зависимости от длины волны $\lambda$ излучения отображен на рисунке 1.6. На рисунке качественно приведены три кривых соответствующих трём значениям напряжения ( $U_1 < U_2 < U_3$ ), прикладываемых к рентгеновской рубке. Из приведенных на рисунке спектров видно, что для каждого определенного значения напряжения $U$ приложенного к трубке, соответствующий спектр на левом крае кривой резко обрывается при определенной длине волны. Это так называемая коротковолновая граница рентгеновского спектра. Экспериментально установлено, что длина волны $\lambda$ соответствующая коротковолновой границе спектра зависит только от величины напряжения $U$ приложенного к трубке. Другой особенностью спектральных кривых является появление при более высоких напряжениях резких пиков интенсивности. На рисунке 1.6 максимумы интенсивности (пики) отмечены цифрами 1 и 2. Характерная особенность этих пиков заключает в том, что длины волн, на которые приходятся эти пики интенсивности зависят только от материала из которого сделан анод рентгеновской трубки. Поэтому эта часть спектра носит название характеристического рентгеновского спектра.

Особенностью тормозного (сплошного) спектра, как выше сказано, является очень резкое уменьшение интенсивности в районе коротковолновой границы. С точки зрения классической физики при резком торможении электронов на поверхности анода должно рождаться электромагнитное излучение, что действительно наблюдается в эксперименте. Спектр излучения непрерывный и носит название тормозной рентгеновский спектр. Несоответствием с классической электродинамикой как раз и является резкое уменьшение интенсивности в районе коротковолновой границы тормозного спектра. При классическом подходе распределение энергии на границе спектра должно плавно приближаться к нулю, однако как видно в реальности (рисунок 1.6) имеет место резкое уменьшение интенсивности. Объяснение этого экспериментального факта с позиций классической физики сопряжено с большими трудностями. Однако, привлекая квантовую теорию, по которой рождение электромагнитного излучения происходит порциями энергии, т.е. квантами, это несоответствие легко устраняется. Приравнивая максимально возможную энергию электрона, которую он приобретает в электрическом поле при ускорении с энергией

рождённого кванта можно получить выражение, которое связывает приложенное напряжение $U$ и коротковолновую границу $\lambda$ спектра в виде:

$$eU = \frac{hc}{\lambda}. \qquad (1.5)$$

Зависимость коротковолновая границы тормозного спектра $\lambda$ от приложенного напряжения $U$ из этого выражения полностью согласуется с экспериментальными данными. Кроме этого данное выражение (1.5) использовалось на ранних этапах развития квантовой теории для получения независимого значения постоянной Планка $h$.

Объяснение характеристического линейчатого спектра зависящего от вещества, из которого сделан анод рентгеновской трубки, лежит полностью в рамках квантовой физики. Вкратце может быть дано следующее объяснение. Все электроны, принадлежащие данному атому, можно разделить на группы согласно их энергии, на так называемые оболочки. Например, наиболее связанные электроны, которые ближе к ядру относятся к $K$ оболочке. Следующая идёт $L$ оболочка, затем $M$ и т.д. Когда высокоэнергетические электроны, ускоренные электрическим полем в трубке, выбивают электроны из оболочки $K$ (или из другой) в ней образуются вакансии. Такие вакансии не могут существовать не заполненными электронами. Поэтому очень быстро, за период времени порядка $10^{-8} c$, вакансии заполняются электронами, которые принадлежат выше расположенным оболочкам. При переходе электронов из одной оболочки в другую излучается квант рентгеновского излучения определенной энергии равной разнице между энергиями электрона в оболочках. Это излучение как раз и соответствует определенной линии в спектре характеристического рентгеновского излучения.

## 1.3. Эффект Комптона

При исследовании рассеянии рентгеновских лучей на графите Комптон обнаружил, что в рассеянных рентгеновских лучах присутствуют волны с длиной волны большей исходной. С точки зрения классической физики такого не может быть, т.к. согласно классической электродинамике электроны в веществе (атомах), которые подвергаются воздействию падающей электромагнитной волны должны переизлучать электромагнитное изучение с той – же частотой. Особенностью этого излучения было то, что длина волны всегда больше длины исходного рентгеновского излучения и зависит от угла рассеяния.

Комптону в 1923 г. удалось объяснить все особенности обнаруженного им эффекта при допущении, что рентгеновское излучение в этом эффекте ведет себя как поток частиц. Рассеяние происходит как упругое взаимодействие частиц в данном случае электрона и фотона как упругое взаимодействие шаров. На рисунке 1.7 схематически представлен процесс рассеяния рентгеновского кванта с исходной длиной волны $\lambda$ на свободном электроне. Связанный электрон в атоме может рассматриваться свободным, т.к. энергия налетающего рентгеновского фотона на несколько порядков превышает энергию связи электрона в атоме углерода. Рассматривая

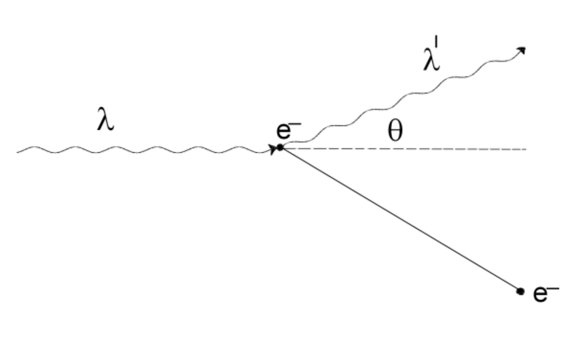


Рис. 1.7

взаимодействие рентгеновского кванта и свободного электрона как столкновение упругих шаров из законов сохранения энергии и импульса в виде:

$$E_\lambda + m_0 c^2 = E_e + E_{\lambda'} \tag{1.6}$$

$$\vec{p}_\lambda = \vec{p}_e + \vec{p}_{\lambda'}, \tag{1.7}$$

где $E_\lambda$, $E_{\lambda'}$, $E_e$ – соответственно энергии падающего, рассеянного фотонов и электрона, $\vec{p}_\lambda$, $\vec{p}_{\lambda'}$, $\vec{p}_e$ – соответственно импульсы падающего, рассеянного фотонов и электрона, может быть получена формула Комптона, которая связывает между собой длину волны падающего фотона $\lambda$, длину волны рассеянного фотона $\lambda'$ и угла рассеяния $\theta$ в виде:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta), \tag{1.8}$$

где выражение $\frac{h}{m_0 c} = \lambda_c$ носит название комптоновской длины волны той частицы, масса покоя $m_0$ которой стоит в формуле Комптона (например, для электрона $\lambda_c = 0{,}024\overset{0}{A}$).

## 1.4. Тепловое излучение

Все нагретые тела излучают электромагнитные волны. Это так называемое тепловое излучение. Спектр теплового излучения непрерывный. Специфичность этого излучения, заключается, во первых, в его изотропности – интенсивность излучение одинакова во всех направлениях, при этом оно не поляризовано, и второе важное отличие от излучения, например, ускорено двигающегося заряда – это способность теплового излучения приходить в тепловое равновесие с излучающим телом. Это означает, что при тепловом равновесии энергия излучения тела равна поглощенной энергии. Изучая особенности теплового излучения, а это происходило во второй половине, ближе к концу XIX столетия, ученые того времени пришли к выводу, что закономерности теплового излучения установленные в эксперименте не согласуются с теоретическими представлениями, основанными на классической физике.

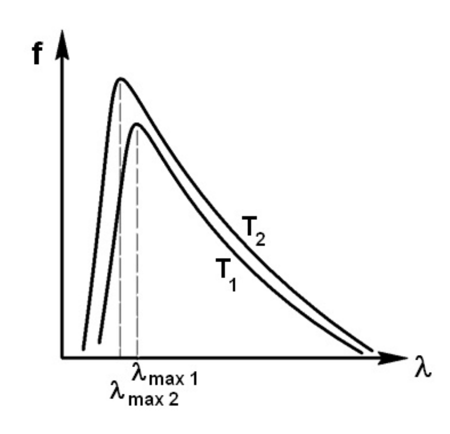


Рис. 1.8

Рассмотрим процессы излучения и поглощения теплового излучения нагретым телом. Интегральной характеристикой. описывающей процесс излучения является энергетическая светимость $R$, определяющая энергию излучаемой с одного квадратного метра поверхности нагретого тела за 1 секунду во всем интервале длин волн излучения.

Спектр теплового излучения неоднороден, и распределение энергии излучения по частоте, т.е. спектральная характеристика $r(\lambda,T)$ носит название излучательной способности и соответствует излучаемой энергии в узком интервале длин волн в окрестности определенной длины волны при температуре $T$. Между излучательной способностью $r(\lambda,T)$ и энергетической светимостью $R$ имеется очевидная связь:

$$R = \int r(\lambda,T)d\lambda, \tag{1.9}$$

где интегрирование осуществляется по всем длинам волн от $0$ до $\infty$.

Для описания поглощения нагретыми телами теплового излучения введем в рассмотрение спектральную характеристику поглощения – поглощательную способность $\alpha(\lambda,T)$ определив её как отношение поглощенной энергии $d\Phi'$ к падающей $d\Phi$ в некотором узком интервале длин волн в окрестности длины волны $\lambda$ при температуре $T$ теплового равновесия в виде:

$$\alpha(\lambda,T) = \frac{d\Phi'}{d\Phi}, \tag{1.10}$$

Опыт показывает, что поглощательная способность также зависит от температуры тела. По своему смыслу, а именно, отношение падающей энергии к поглощенной следует, что поглощательная способность меньше единицы т.к. все реальные тела некоторую долю энергии всегда отражают. Максимальное значение равное единицы поглощательная способность может принимать у так называемого абсолютно черного тела, представляющую собой некую физическую модель. Хорошим примером абсолютно черного тела может служить поверхность малого отверстия в полости, поскольку можно считать, что все падающее излучение в определенном интервале длин волн будет поглощаться в полости.

Кирхгоф установил, что отношение излучательной способности к поглощательной способности не зависит от свойств тел находящихся в тепловом равновесии и равно некой универсальной функции зависящей только от температуры при данной длине волны:

$$\frac{r(\lambda,T)}{\alpha(\lambda,T)} = f(\lambda,T), \tag{1.11}$$

У исследователей тепловых процессов, а надо вспомнить, что это было время как раз расцвета тепловых машин, некая функция, определяющая важное соотношение (1.11) представляла большой интерес. Совершенно очевидно, что установить вид функции $f(\lambda,T)$ в первую очередь можно было на основе экспериментальных исследований излучения абсолютно черного тела., т.е. излучения исходящего из отверстия в полости, стенки которой поддерживаются при заданной температуре $T$. Такая возможность вытекает из выражения Кирхгофа (1.11) если положить для абсолютно черного тела $\alpha(\lambda,T)=1$. В этом случае $\frac{r(\lambda,T)}{1} = f(\lambda,T)$. Другим словами универсальная функция $f(\lambda,T)$ является спектральной характеристикой теплового излучения абсолютно черного тела. На рисунке 1.8 показан вид экспериментально полученных излучательных способностей нагретого абсолютно черного тела при двух температурах $T_1$ и $T_2$, (для определённости положено $T_2 > T_1$). Из этого рисунка следует, что основная подавляющая доля излучаемой энергии лежит в некотором интервале длин волн в окрестности определенной длины волны, на которую приходится максимум излучения. С увеличением температуры спектральная характеристика смещается в сторону более коротких волн и становится выше. Из теоретических представлений Вин получил соотношение между длиной волны $\lambda_{max}$, на которую приходится максимум энергии теплового излучения и температурой тела $T$ в виде:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}, \tag{1.12}$$

которое носит название закона Вина (или закона смещения Вина), $b$ – постоянная Вина.

По экспериментальным данным было установлено простое эмпирическое соотношение между температурой и энергетической светимостью нагретого до температуры $T$ тела в виде закона Стефана-Больцмана:

$$R = \sigma T^4, \tag{1.13}$$

где $\sigma$ – постоянная Стефана – Больцмана ( $5{,}7 \cdot 10^{-7} \frac{Дж}{м^2 с T^4}$).

Все попытки физиков применить классическую физику для объяснения спектров излучения нагретых тел не приводило к успеху. С классической точки зрения, излучение имеет волновую природу, а излучение черного тела как результат колебаний линейных гармонических классических осцилляторов. В соответствии с этой моделью излучение в полости представляет собой совокупность стоячих электромагнитных волн, распространяющихся между стенками. Эта модель лежит в основе распределения Релея-Джинса. В соответствии с этим распределением излучательная способность абсолютно черного тел дается выражением:

$$f(\lambda, T) = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4}, \tag{1.14}$$

Очевидно, что выражение (1.14) не может быть согласовано с экспериментальной кривой спектра излучения абсолютно черного тела (рисунок 1.8), потому что с уменьшением длины волны функция (1.14) безгранично возрастает, тогда как реальный спектр (рисунок 1.8) имеет максимум, а по обе стороны от максимума плотность излучения уменьшается.

М.Планк подошел к решению проблемы излучения нагретых тел, формулировав совершенно новые положения, ранее не применявшиеся в классической физике.

1. Осцилляторы абсолютно черного тела не излучают электромагнитные волны непрерывно. Излучение происходит только при изменении состояния осциллятора.
2. Осциллятор испускает энергию в поле электромагнитного излучения или поглощает энергию из поля электромагнитного излучения определенными порциями энергии – квантами, величина которых равна $h\nu$.

Эти новые положения приводят к непротиворечивому с точки зрения согласия с экспериментом распределению излучения абсолютно черного тела в виде:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\, \omega^3}{2\pi c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}, \tag{1.15}$$

Это выражение носит название формулы Планка. Из этой формулы может быть получены оба закона теплового излучения, а именно, закон Стефана – Больцмана в результате интегрирования (1.9) и закон Вина при дифференцировании выражения (1.15) с целью нахождения длины волны, на которую приходится максимум плотности излучения абсолютно черного тела. В результате получается закон Вина, который ранее (выражение (1.12)) был получен из других соображений, причем для обоих случаев получаются величины как постоянной Вина $b$ ( $2{,}9 \cdot 10^{-3} м \cdot К$ ) , так и постоянной Стефана – Больцмана $\sigma$.

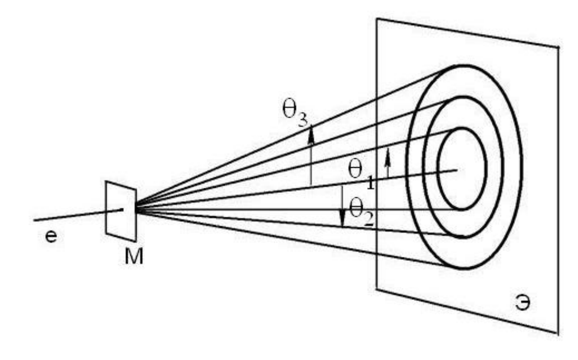



Рис. 1.9.

Гипотеза Планка о том, что при взаимодействии излучения с веществом поглощение энергии происходит не непрерывно, а квантами величиной $h\nu$ успешно было использовано Эйнштейном для объяснения фотоэффекта.

## 1.5. Волны де-Бройля

Таким образом, экспериментально и теоретически (например, для теплового излучения) для электромагнитных волн (света) был установлен корпускулярно – волновой дуализм. Электромагнитные волны в экспериментах могут проявлять свойства корпускул или традиционной классической электромагнитной волны. А теперь правомерно поставить вопрос, а частица (например, электрон) будет при своем движении демонстрировать свойства присущие волновому процессу? В 1924 г. де Бройль выдвинул гипотезу, что и частицы могут демонстрировать волновые свойства и обладать таким свойством как частота, и, следовательно, и длиной волны. Согласно его гипотезе, обладая импульсом $p$, частица будет демонстрировать волновые свойства, как если бы это была волна с длиной волны равной:

$$ƛ = \frac{h}{p}, \tag{1.16}$$

Несмотря на то, что де Бройль первоначально в большей степени рассматривал проблему волновых свойств у частиц на примере электрона, соотношение (1.16) справедливо для любых материальных тел. Автомобиль массой $\approx 10^3 кг$ двигающийся со скоростью $\approx 10 м/с$ демонстрировал бы волновые свойства с длиной волны де Бройля $ƛ \approx 10^{-38} м$. Совершенно очевидно, что столь малую величину длины волны принципиально невозможно измерить в каком либо мыслимом эксперименте. А электрон, двигающийся с такой же скоростью, напротив, обладал бы длиной волны $ƛ \approx 10^{-6} м$, которая принципиально может быть определена в эксперименте.

Впервые волновые свойства у электрона были обнаружены в 1925 г. Девисоном и Джермери в экспериментах при отражении электронов от кристаллического никеля с периодом решетки $d = 0{,}91 \overset{0}{A}$. Они установили, что электроны при отражении ведут себя как волны, демонстрирующие полное согласие с условием Брегговского отражения для максимума первого порядка ($m = 1$):

$$2d \sin\theta = ƛ, \tag{1.17}$$

для угла скольжения $\theta \approx 65^0$ и длины волны де Бройля $ƛ \approx 1{,}65 \overset{0}{A}$, которая получается из формулы (1.16) для энергии электронов равной $54 эВ$.

В 1927 г. Дж. Томсон осуществил опыты с быстрыми электронами. Эксперимент схематически показан на рисунке 1.9. Исследовалось рассеяние быстрых электронов на очень тонкой металлической фольге ($М$), изготовленной из поликристаллического материала с хаотическим расположением кристаллических осей микрокристаллов. Томсон получил на экране ($Э$) ряд дифракционных колец. Углы рассеяния $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ (углы между дифрагированным лучом и направлением падающего пучка электронов) и т.д. соответствовали значениям углов, которые получаются при дифракции при Брегговском рассеянии в проходящем свете.

Самым важным результатом этих экспериментов явилось, то, что волновые свойства приписывались единичному электрону, и он испытывает рассеяние от всех атомных плоскостей кристалла, что никак не вписывается в корпускулярную природу частицы.

Н. Бор, пытаясь разрешить противоречие волна – частица, ввел так называемый принцип дополнительности. Согласно этому принципу, ни волна, ни частица никогда не проявляют одновременно в одном и том же эксперименте и волновые и корпускулярные свойства. В каждом случае для полного описания явления необходимо использовать и волновую и корпускулярную модели, но при этом каждая из этих моделей имеет свою собственную сферу приложения.

## 1.6. Соотношение неопределенностей Гейзенберга

Как следствие волновых свойств у частиц, вытекает проблема описания поведения частиц с позиции классической физики. В классической физике, с использованием законов Ньютона, описание движение частиц осуществляется по траекториям, т.е. другими словами поведение частиц детерминистское. Зная силу, действующую на частицу, её начальное положение и скорость, можно предсказать положение частицы в любой момент времени в будущем. Однако для волнового поведения появляется проблема с измерением локализации частицы – волны в пространстве. С волновой позиции экспериментатор принципиально не может определить местоположение частицы. Действительно, проведем следующий мысленный эксперимент. Попробуем определить место положение электрона в пространстве. Из оптики хорошо известно, что явление дифракции начинает наблюдаться в случае, если длина волны света соизмерима с размерами объекта, на который падает свет. Принимая во внимание, что длина волны света равна $\lambda$ экспериментатор не может определить местоположения электрона с большей точностью $\Delta x$ (неопределенностью) чем длина волны света $\lambda$, т.е.

$$\Delta x \geq \lambda . \qquad (1.18)$$

С другой стороны, при взаимодействии света с электроном (а оно обязано быть, если ставится задача определить местоположение), электрону может быть передан импульс, причем неопределенность $\Delta p$ переданного импульса не может быть меньше импульса фотона, т.е.

$$\Delta p \geq \frac{h\nu}{c} . \qquad (1.19)$$

Из этих двух неравенств (1.18) и (1.19), которые выполняются одновременно, можно получить, перемножением друг на друга, соотношение, накладывающее ограничение снизу на неопределенность координаты $\Delta x$ и неопределенность импульса электрона $\Delta p$ в виде:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h . \qquad (1.20)$$

Более точное выражение, которое носит название соотношение неопределенностей было получено Гейзенбергом и имеет вид:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar . \qquad (1.21)$$

Этот принцип выражает фундаментальный предел возможности одновременного измерения определенных пар переменных, описывающих поведение частицы, например положения частицы и её импульса. Такие пары называются сопряженными величинами.

Отметим, что нет никаких ограничений в точности измерения таких величин, как например, проекции импульса на оси $y$ и $z$ ($\Delta p_y$ и $\Delta p_z$) и координаты $x$ частицы ($\Delta x$).

К сопряженным величинам относятся также энергия и время. Поэтому для них также справедливо соотношение неопределённостей Гейзенберга в виде:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar . \tag{1.22}$$

Это соотношение означает, что определение энергии с точностью $\Delta E$ занимает интервал времени $\Delta t$, чтобы выполнялось (1.22).

Из-за малости постоянной Планка $\hbar$ соотношение неопределенностей Гейзенберга (1.21 и 1.22) не применимо для макроскопических тел. Этот принцип не имеет никакого отношения к неопределенности в обычном смысле при взаимодействии между измерительным прибором и изучаемым объектом, например, когда термометром измеряется температура объекта неизбежно при взаимодействии температура изменится только из-за акта измерения.

Таким образом, соотношение неопределенностей отражает закон природы и является логическим следствием двойственной природы вещества. Микромир по существу является недетерминистским.

# <u>Глава 2.</u> Уравнение Шредингера.

## 2.1. Волновая функция. Нестационарное и стационарное уравнение Шрёдингера.

Электромагнитное поле является источником информации о таких конкретных величинах как импульс и энергия фотона. В общем случае, с любой частицей, будь то фотон или электрон, согласно гипотезе де Бройля, ассоциируется волновое поле, амплитуда которого задается функцией $\psi$, которой дали название волновая функция. Волновое поле служит источником информации о таких величинах, как импульс и энергия частицы. Частота и длина волны, ассоциированные с волновым полем, определяются соответственно из соотношений $\nu = \frac{E}{h}$ и $\lambda = \frac{h}{p}$.

Из волновой теории известно, что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды волны. Поэтому, если частица связана с волновым процессом, то интенсивность такого волнового процесса должна также быть пропорциональна квадрату волновой функции $\psi$. Волновая функция, следовательно, должна описывать местоположение частицы. Это следует из простого качественного вывода, что частице вероятнее находится там, где интенсивность волны больше. Волновая функция имеет вероятностную интерпретацию и квадрат её модуля $|\psi|^2$ пропорционален вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства в данный момент времени. Вероятность того, что частица (в одномерном случае) находится в пределах элемента длины $dx$ равна: $dP = |\psi|^2 dx$. Поэтому правило нормировки для волновой функции $\psi$ может быть записано следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi \psi^* dx = 1 . \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) означает, что вероятность нахождения частицы во всем пространстве, доступном частице, должна быть равна 1. Как ранее указывалось (соотношение неопределенностей Гейзенберга), в квантовой физике нет возможности описывать движение частицы по траектории. Единственное, что может быть сделано – это определить плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке. Для определения конкретного вида волновой функции $\psi$ необходимо решить дифференциальное уравнение Шредингера:

$$-i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\hbar}{2m}^{2}\nabla^{2}\psi-U\psi\,, \tag{2.2}$$

где $U$ – потенциальная энергия частицы. На волновую функцию накладываются следующие требования: (1) должен выполняться принцип суперпозиции, который означает следующее: если волновые функции $\psi_1$, $\psi_2$ и т.д. являются решениями уравнения Шрёдингера, то волновая функция, представляющая линейную комбинацию в виде $\psi=a\psi_1+b\psi_2+....$ тоже является решением данного уравнения Шрёдингера; (2) волновая функция $\psi$ и производная $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ должны быть конечными и непрерывными.

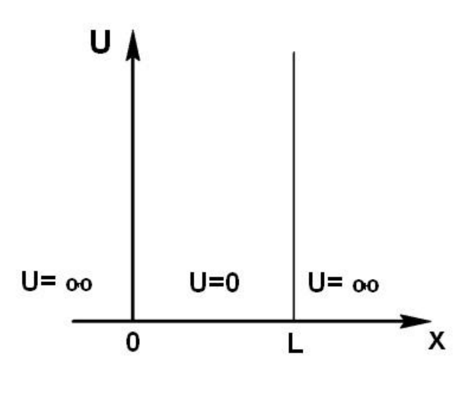



Рис. 2.1.

В стационарном случае вероятность обнаружения частицы не должна зависеть от времени, причем сама волновая функция может содержать зависимость от времени. Этому удовлетворяет волновая функция, которая имеет вид:

$$\psi(x,t)=Ae^{i\frac{E}{\hbar}t}\varphi(x)\,. \tag{2.3}$$

При подстановки функции (2.3) в уравнение Шрёдингера (2.2) получается стационарное уравнение Шрёдингера для определения волновой функции $\varphi(x)$, которая зависит только от координаты:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\varphi+\left(E-U\right)\varphi=0\,. \tag{2.4}$$

## 2.2. Простейшие задачи квантовой физики

В качестве примера использования стационарного уравнения Шрёдингера (2.4) для нахождения волновой функции $\varphi$, рассмотрим задачу для частицы находящейся в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, показанной на рисунке 2.1. Потенциальная энергия частицы в этой задаче удовлетворяет таким граничным условиям:

$U=0$ при $0<x<L$ и $U=\infty$ при $x\le 0$ и $x>L$,

где $L$ – ширина потенциальной ямы.

Стационарное уравнение (2.4) при условии $U=0$ приобретает следующий вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi+E\varphi=0\,. \tag{2.5}$$

Решением этого уравнения будет спектр волновых функций:

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{\pi n x}{L}) . \qquad (2.6)$$

и спектр значений энергии частицы в виде:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} (\frac{\pi}{L})^2 n^2 , \qquad (2.7)$$

где $n$ – квантовое число, которое может принимать значения 1, 2, 3...... Таким образом видно, что частица может находится в одном из конкретных квантовых состояний, в которых энергия принимает строго определенное значение, которое может быть вычислено согласно выражения (2.7). Чтобы перейти из одного состояния в другое частица должна приобрести или отдать определенное значение энергии равное разнице между энергетическими уровнями $E_n$. Из полученного решения также видно, что энергия частицы не может равняться нулю. Оценка энергии электрона в основном состоянии, если он находится в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками шириной $L \approx 1\,нм$ дает величину порядка $E_1 \approx 1эВ$.

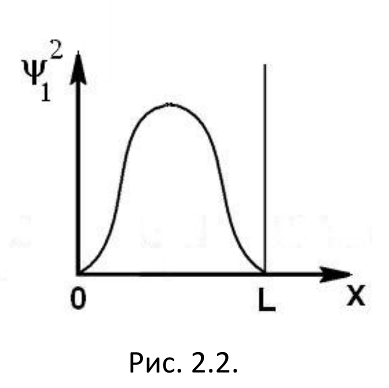


Рис. 2.2.

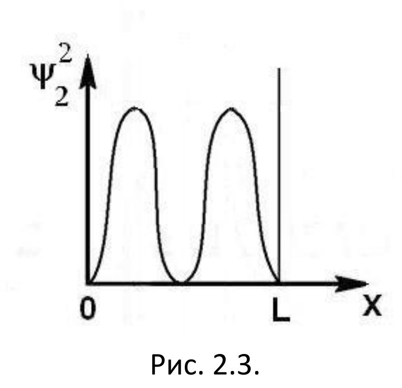


Рис. 2.3.

На рисунках 2.2 и 2.3 приведены распределение плотности вероятности обнаружения частицы в основном и первом возбужденном состояниях соответственно. Хорошо видно, что в основном состоянии (рисунок 2.2) максимальная вероятность обнаружить частицу находится в центре потенциальной ямы, тогда как для другого состояния (рисунок 2.3), точно в центре ямы ( $x = \frac{L}{2}$ ) обнаружить частицу уже нельзя.

Рассмотрим квантовомеханическую задачу о квантовом осцилляторе. В уравнении Шрёдингера (2.4) необходимо определить вид потенциальной энергии частицы $U$. В классической механике потенциальная энергия гармонического осциллятора (например, пружинного маятника) определяется следующим выражением:

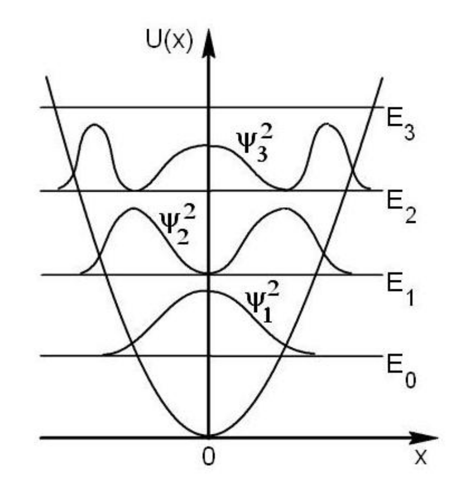


Рис. 2.4

$$U = \frac{1}{2} k x^2 , \qquad (2.8)$$

где $k$ – коэффициент упругости, $x$ – смещение тела от положения точки равновесия. Циклическая частота $\omega$ связана с коэффициентом упругости и массой классического тела в виде:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad (2.9)$$

Взяв потенциальную энергию частицы $U$ в виде (2.8) можно переписать уравнение Шрёдингера для квантового осциллятора следующим образом:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi + (E - \frac{1}{2}kx^2)\varphi = 0, \quad (2.10)$$

Решение этого уравнения можно записать в виде следующего спектра волновых функций:

$$\varphi_n(x) = (\frac{a}{\sqrt{\pi}2^n n!})^{\frac{1}{2}} H_n(ax)e^{-\frac{1}{2}ax^2}, \quad (2.11)$$

где $a^2 = \frac{m\omega}{\hbar}$ и соответствующего спектра энергий осциллятора:

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \quad (2.12)$$

где $n$ - квантовые числа, принимающие значения $0, 1, 2, 3.....$

$H_n(ax)$– представляют собой полиномы Эрмита, которые можно найти по рекуррентной формуле $H_{n+1} = 2(ax)H_n - 2nH_{n-1}$, причем $H_0 = 1$ и $H_1 = 2ax$.

Из задачи о квантовомеханическом осцилляторе следует необычный вывод, а именно, энергия осциллятора не может обратиться в ноль ни при каких условиях. Из выражения (2.12) следует, что наименьшее значение энергии равно $\frac{1}{2}\hbar\omega$. Это значение называется нулевой энергией квантового осциллятора. В экспериментах по рассеянию света на кристаллах установлено, что оно не стремится к нулю при практически нулевых температурах. Интенсивность рассеянного света имеет конечное значение. Это подтверждает, что атомы в узлах кристаллической решетки продолжают колебаться при таких низких температурах.

Квантовая теория позволяет вычислить вероятность перехода осциллятора из одного квантового состояния в другое. Подобные вычисления показывают, что переходы возможны только такие, при которых квантовое число $n$ изменяется на единицу:

$$\Delta n = \pm 1, \quad (2.13)$$

Это так называемое правило отбора, показывающее условия, накладываемые на квантовые числа при переходе квантовой системы из одного квантового состояния в другое. Поэтому, согласно (2.12 и 2.13) квантовый осциллятор может излучить или поглотить квант электромагнитного поля только с энергией $\hbar\omega$.

На рисунке 2.4 представлены распределения плотности вероятности обнаружения частицы для некоторых допустимых энергий. Из приведенных кривых распределения вероятности видно, что для квантового осциллятора имеется конечное значение вероятности обнаружить частицу за пределами, где полная энергия частицы меньше потенциальной. Ответим, что в классической механике это является недопустимым условием и в таких областях пространства частице по классическим законам находится запрещено

## 2.3. Туннельный эффект

В ряде случаев, при решении уравнения Шредингера, можно явно увидеть ситуации, когда волновая функция может принимать конечные значения вне потенциальной ямы. Хороший пример этому является выше рассмотренный квантовый осциллятор. Действительно, для данного вида потенциального поля, волновые функции (2.11) принимают конечные значения на любом расстоянии от центра ямы. Это в свою очередь означает, что есть конечная вероятность обнаружить частицу вне потенциальной ямы, т.е. в области, где по классическим законам частица не может пребывать.

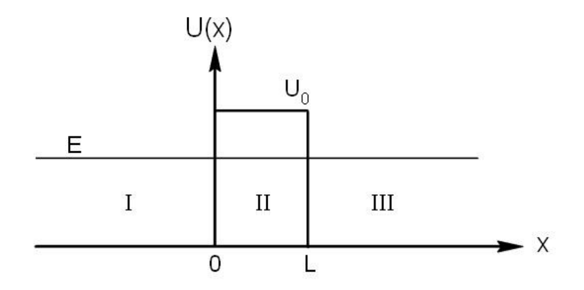



Рис. 2.5.

Рассмотрим ситуацию, когда частица преодолевает область пространства, где ей запрещено быть по классическим законам. Пусть это будет небольшая область пространства, где потенциальная энергия частицы имеет прямоугольную форму шириной $L$ и высотой $U_0$, как показано на рисунке 2.5. Пусть частица падает на потенциальный барьер слева. Энергия частицы $E$ меньше высоты потенциального барьера $U_0$. Ширина барьера выбрана такая, что бы справа от барьера волновая функция частицы имела бы конечную амплитуду. Обозначим волновые функции в области I, II и III в виде $\psi_1, \psi_2, \psi_3$. Поэтому уравнения Шрёдингера для каждой из областей можно записать следующим образом:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_1 + E\psi_1 = 0 \text{ для I области;} \tag{2.14}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_2 + (E - U_0)\psi_2 = 0 \text{ для II области;} \tag{2.15}$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi_3 + E\psi_3 = 0 \text{ для III области.} \tag{2.16}$$

Решением этих уравнений будут функции:

$$\psi_1 = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}; \tag{2.17}$$

$$\psi_2 = Fe^{-\mu x} + Ge^{\mu x}; \tag{2.18}$$

$$\psi_3 = Ce^{ikx} + De^{-ikx}, \tag{2.19}$$

где $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ и $\mu^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2}$. Постоянные A, B, и т.д. могут быть определены следующим образом:

A и B – амплитуды отраженной и падающей волны соответственно;

F – амплитуда волны прошедшей через барьер в область II;

C – амплитуда волны прошедшей в область III.

Амплитуды G и C могут быть положены равными нулю, т.к. амплитуда G дает не физическое поведение волновой функции $\psi_2$ из-за её экспоненциального роста, а амплитуда C определяет несуществующую волну в области III. Удовлетворив условие непрерывности волновой функции в трех областях и её гладкости (непрерывности первой производной)

можно найти все амплитуды в явном виде через энергию частицы $E$, высоту барьера $U_0$ и его ширину $L$.

Можно определить коэффициент прозрачности барьера в виде $T = \frac{D^2}{B^2}$ и коэффициент отражения в виде $R = \frac{A^2}{B^2}$ причем $T + R = 1$. Подстановка явного вида амплитуд, дает прозрачность барьера в следующем виде:

$$T \approx e^{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}L}. \qquad (2.20)$$

При увеличении ширины барьера ($L\uparrow$) из выражения (2.20) следует, что вероятность преодоления частицей барьера уменьшается ($T\downarrow$). При увеличении энергии частицы ($E\uparrow$) при сохранении условия ($E < U_0$) прозрачность барьера увеличивается ($T\uparrow$). Из (2.20) также вытекает, что при одинаковых условиях более тяжелая частица имеет меньшую вероятность преодолеть потенциальный барьер, чем легкая.

Одно из первых успешных применений теории туннельного эффекта было выполнено Гаммовым в 1928 году для объяснения $\alpha-$распада ядра.

# Глава 3. Строение атома

## 3.1. Планетарная модель атома Резерфорда

Дж. Томсон в 1897 году открыл электрон и через 5 лет в 1903 предложил физическую модель атома. Атом по Томсону представлял собой положительно заряженную сферу со вставленными в неё отрицательно заряженными электронами, причем вся система была электрически нейтральной. Эта модель просуществовала до 1911 года, когда Э. Резерфорд показал, что модель атома по Томсону имеет много недостатков и не может объяснить ряд очевидных результатов эксперимента.

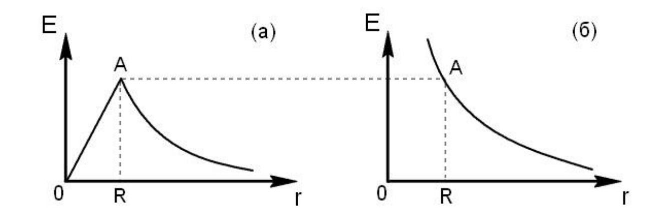



Рис. 3.1.

Резерфорд, основываясь на результатах рассеяния $\alpha-$частиц, предложил планетарную модель атома, по которой в центре атома находится компактное положительно заряженное ядро, в котором сосредоточена практически вся масса атома, а электроны располагаются на периферии. Нейтральность атома следует из равенства зарядов ядра и облака электронов.

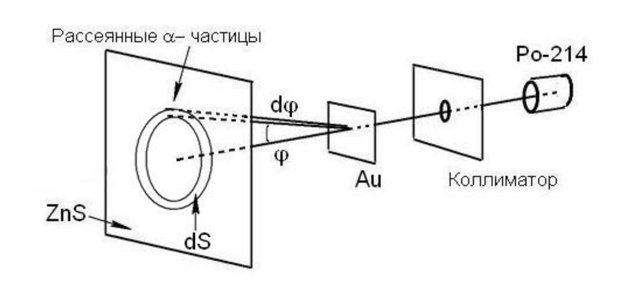



Рис. 3.2.

На рисунке 3.1 схематически показано распределение электрического поля для моделей атома Томсона (а) и Резерфорда (б). Из этих распределений поля видно, что $\alpha-$частица при проникновении в атом, по модели Томсона, будет претерпевать

незначительные отклонения от первоначального направления, тогда как для атома, по модели Резерфорда, к центу (к ядру) электрическое поле будет возрастать и способно отклонить $\alpha-$частицу на большие углы, вплоть до отражения назад, что редко, но действительно регистрируется в эксперименте.

Рассмотрим более подробно эксперимент Резерфорда, схематично показанном на рисунке 3.2. В качестве источника $\alpha-$частиц с энергией 7,68 $МэВ$ использовался изотоп Po–214. В качестве мишени использовалась тонкая фольга из золота Au (Z=79). Большинство $\alpha-$частиц проходит через тонкую фольгу не отклоняясь. Но некоторое число частиц отклоняется под различными углами и при соударении с экраном покрытым люминофором (ZnS) вызывают вспышки, которые могут быть подсчитаны. В экспериментах подсчитывалось число вспышек вызванных частицами, рассеянными под углами от $\varphi$ до $\varphi+\Delta\varphi$ и сравнивалось с теоретическим значением, рассчитанным для модели Резерфорда. В основу модели положено кулоновское взаимодействие $\alpha-$частицы, имеющей заряд $+2e$, и точечным ядром с положительным зарядом $+Ze$ в виде:

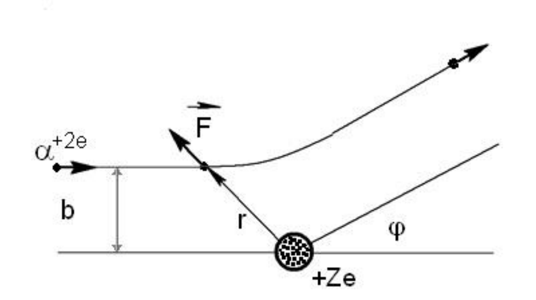


Рис. 3.3.

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}, \tag{3.1}$$

где $r-$расстояние между ядром и $\alpha-$частицей. Под действием этой силы $\alpha-$частица, исходно летящая из бесконечности на расстоянии $b$ (прицельное расстояние) от оси, на которой находится ядро, после взаимодействия с ядром будет лететь по направлению, которое определяется углом рассеяния $\varphi$, как схематически показано на рисунке 3.3. Для геометрии рассеяния, показанного на рисунке 3.3 можно получить соотношение между прицельным расстоянием $b$ и углом рассеяния $\varphi$ $\alpha-$частицы в виде:

$$b=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 K_\alpha}ctg\frac{\varphi}{2}, \tag{3.2}$$

где $K_\alpha-$кинетическая энергия $\alpha-$частицы.

Полученное выражение невозможно проверить экспериментально, поскольку невозможно проследить за движением одной $\alpha-$частицы и измерить для неё прицельное расстояние $b$. Поэтому, с целью проверки модели Резерфорда, в эксперименте подсчитывается число частиц $dN$ рассеянных в телесный угол, как показано на рисунке 3.2:

$$d\Omega=\frac{dS}{r^2}, \tag{3.3}$$

где $dS-$площадь кольцевого участка поверхности на сцинтилляционном экране $ZnS$ на расстоянии $r$ от мишени, где подсчитывались вспышки света. Резерфордом была получена формула, связывающая число $\alpha-$частиц, рассеянных в телесный угол $d\Omega$, параметры мишени, энергию частицы и углы рассеяния в виде:

$$\frac{dN}{N_0} = nl\pi\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 K_\alpha}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\varphi}{2}}, \qquad (3.4)$$

где $l$ – толщина мишени, $n$ – плотность ядер в веществе мишени, $N_0$ – число $\alpha$ – частиц падающих на единицу поверхности мишени в единицу времени. Выражение (3.4), известное как формула Резерфорда, с успехом подтвердила полное согласие с экспериментальными данными, что подтвердило планетарную модель атома, и таким образом существование ядра.

Несмотря на определенные успехи в объяснении строения атома, планетарная модель атома содержит ряд непреодолимых с точки зрения классической физики противоречий. Заряженная частица, двигающаяся с ускорением должна непрерывно излучать электромагнитную энергию. Частота этого излучения должна быть равна частоте обращения частицы вокруг ядра. Поэтому в соответствии с планетарной моделью полная энергия атома должна уменьшаться, а частота непрерывно возрастать. В таком случае атом очень быстро перестанет существовать, т.к. электрон упадет на ядро, а излучение представляло бы собой непрерывный сплошной спектр. Как хорошо известно, оба выше упомянутых предположения в эксперименте не наблюдаются. В противоположность этому, например наипростейший атом водорода является устойчивой системой и излучает электромагнитные волны дискретной длиной волны.

## 3.2. Атом водорода по теории Бора

Если пропустить электрический ток через одноатомный газ, то газ становится источником серии так называемых спектральных линий. Длины волн соответствующих этим линиям характеризуют используемый газ, и называется линейчатым спектром данного газа. Видимая часть спектра водорода называется серией Бальмера, которую Бальмер обнаружил в 1885 г. Если пропустить электрический разряд через двухатомный газ, например азот, то будет наблюдаться так называемый полосатый спектр, который представляет собой группы тесно расположенных линий. Полосатый спектр имеет другое происхождение по сравнению с линейчатым спектром. Свет от источника излучения в виде нити накаливания имеет сплошной спектр и содержит непрерывный набор длин волн. Какова причина излучения атомами линейчатого спектра? Этот вопрос поставил себе Н.Бор. После того, как Резерфорд предложил планетарную модель атома, у Бора уже не стало сомнений в том, что электроны вращаются на некотором расстоянии от массивного ядра. В основу своей теории Бор положил ряд постулатов:

1. Электрон обращается вокруг протона в атоме водорода на так называемых стационарных орбитах, на которых он не излучает электромагнитную энергию.
2. Разрешенными орбитами являются только те, для которых момент импульса электрона равен целом числу $n$ умноженному на $\frac{h}{2\pi} = \hbar$, т.е.

$$L = mVr = n\hbar,\; n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (3.5)$$

3. При переходе электрона с одной орбиты с энергией $E_i$ на другую орбиту с энергией $E_f\,(E_f > E_i)$ излучается фотон с частотой:

$$\nu = \frac{E_f - E_i}{h}. \qquad (3.6)$$

Принимая во внимание, что электрон движется равномерно по круговой орбите под действием кулоновской силы и в соответствии с законом Ньютона:

$$ma_ц = m\frac{V^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}, \qquad (3.7)$$

где $a_ц$ - центростремительное ускорение, можно найти радиус любой боровской орбиты $r_n$ в виде:

$$r_n = \frac{4\pi\hbar^2 n^2}{me^2}. \qquad (3.8)$$

Для основного состояния, т.е $n=1$ ,так называемый боровский радиус $r_1 = 0{,}53\ \overset{o}{A}$. Полную энергию электрона на $n-й$ стационарной орбите можно получить в виде:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}. \qquad (3.9)$$

Для $n=1$, т.е. для электрона на первой боровской орбите полная (кинетическая + потенциальная) энергия равна $E_1 = -13{,}6эВ$.

В соответствии с постулатами Бора при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается или поглощается фотон. Воспользовавшись уравнением (3.9) для двух стационарных орбит можно получить выражение для длины волны испущенного фотона в виде:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{64\pi^3\hbar^3\varepsilon_0^2 c}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right). \qquad (3.10)$$

где $n_f$ и $n_i$ – соответственно номера стационарных орбит на какую и с какой перешел электрон. Длины волн, рассчитанные по формуле (3.10) показали полное соответствие с экспериментальными данными.

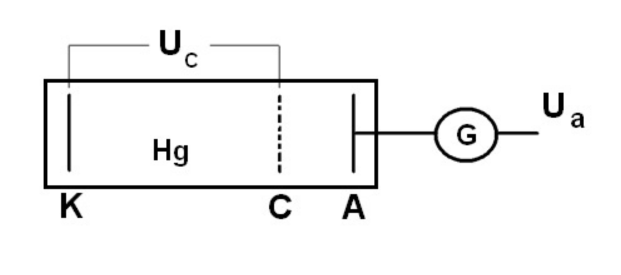



Рис. 3.4.

Экспериментальным подтверждением существования дискретных стационарных состояний, явились результаты опытов Дж. Франка и Г. Герца.

На рисунке 3.4 схематически представлена экспериментальная установка для проведения опытов. В трубке с анодом А, катодом К и сеткой С находятся пары ртути $Hg$. Между катодом и сеткой прикладывается укоряющая разность потенциалов $U_c$. Между анодом и сеткой создается небольшое замедляющее (для электронов) поле с разностью потенциалов $U_a(\approx 0{,}5B)$. Гальванометр $G$ служит для измерения анодного тока. Характерная кривая зависимости анодного тока $I_a$ от сеточного напряжения $U_c$ приведена рисунке 3.5. Объяснение такой зависимости можно дать, рассмотрев поведение электронов испускаемых катодом. Те электроны, энергия которых сравнима с разницей между энергиями стационарных состояний в атоме $Hg$ (равна $4{,}88\ эВ$) испытывают неупругое столкновение с атомами $Hg$. В результате такого столкновения налетающий на атом электрон отдает свою энергию внутреннему,

принадлежащему атому, валентному электрону. В результате потери энергии электрон не может преодолеть задерживающий потенциал. Поэтому анодный ток падает, как это отображено на рисунке 3.5. При дальнейшем увеличении сеточного напряжения $U_c$ электроны приобретают снова энергию и теперь уже испытывают упругое столкновение с атомами $Hg$. При упругих столкновениях энергия электронов практически не изменяется и они беспрепятственно достигают анода. В этом случае ток растет с увеличением $U_c$ как это видно на рисунке 3.5. Однако при достижении нового значения напряжения $U_c$, когда энергия электрона снова сравнима с разницей энергий электрона в атоме снова начинается неупругое взаимодействии, при котором ток снова падает. Таким образом, электрон на свом пути к сетке в зависимости от величины сеточного напряжения $U_c$ может испытывать несколько раз неупругое столкновение с атомами $Hg$. Каждый раз, когда происходит неупругое столкновение атом ртути переходит в возбужденное состояние, и затем, возвращаясь в основное состояние, испускает фотон с длиной волны равной 253,6 нм.

Теория Бора применима к так называемым водородоподобным атомам. Водородоподобными называются атомы, которые ионизированы до такого состояния, когда остается только один электрон. Для такого типа атомов с порядковым номером Z для радиусов стационарных орбит $r_n$ и энергий электрона $E_n$ на стационарных орбитах можно получить следующие выражения:

$$r_n = \frac{r_n^{(H)}}{Z}; \quad (3.11)$$

$$E_n = Z^2 E_n^{(H)}, \quad (3.12)$$

где $r_n^{(H)}$ и $E_n^{(H)}$ – соответственно радиус $n-й$ стационарной орбиты атома водорода и энергии электрона на $n-й$ стационарной орбите. Теория Бора в дальнейшем столкнулась с принципиальными трудностями при объяснении свойств многоэлектронных атомов.

## 3.3. Атом водорода

Теория Бора не смогла ответить на многие вопросы строения атома водорода. Например, почему электроны не излучают электромагнитную энергию и не падают по спирали на ядро. Теория Э. Шрёдингера уже использующая понятия квантовой механики и волновой функции стала как бы завершающим шагом в создании теории строения атома, развитием тех идей, которые впервые высказал Бор.

Атом водорода с его самой простой внутренней структурой представляет собой очень хороший пример квантового объекта применения теории Шрёдингера. На рисунке 3.6 схематически изображен атом водорода в классическом представлении. Протон $p^+$ находится в начале системы координат. В этой системе координат электрон $e^-$ вращается по орбите с радиусом $r$ под действием кулоновской силы притяжения.

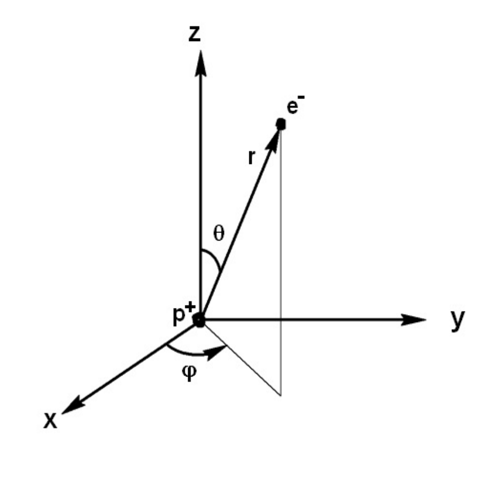



Рис. 3.6.

Потенциальная энергия электрона в электрическом поле, которое создается заряженным протоном равна:

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}. \qquad (3.13)$$

Для такого вида потенциальной энергии уравнение Шрёдингера будет иметь следующий вид:

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\psi + (E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r})\psi = 0. \qquad (3.14)$$

Из симметрии самой задачи следует, что предпочтительней решать это уравнение в сферической системе координат. В такой систем координат координаты электрона задаются радиусом $r$, полярным углом $\theta$ и азимутальным углом $\varphi$. Переход от сферической системы к прямоугольной системы координат, и наоборот, осуществляется согласно формул:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad (3.15)$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad (3.16)$$

$$z = r\cos\theta. \qquad (3.17)$$

В сферической системе координат уравнение Шрёдингера примет вид:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r})\psi = 0. \qquad (3.18)$$

Волновую функцию $\psi$ представим в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной из координат:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi). \qquad (3.19)$$

Подставляя волновую функцию (3.19) в уравнение Шрёдингера, в котором производные второго порядка выражены в сферической системе координат, можно получить три отдельных уравнения, каждое из которых определяет свою функцию $R(r)$, $\Theta(\theta)$ и $\Phi(\varphi)$ соответственно:

$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) + \frac{2mr^2}{\hbar^2}(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r})R = l(l+1)R, \qquad (3.20)$$

где $l$ – орбитальное (или азимутальное) квантовое число.

$$\frac{m_l^2}{\sin^2\theta} - \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}) = l(l+1), \qquad (3.21)$$

где $m_l$ – магнитное квантовое число.

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m_l^2\Phi, \qquad (3.22)$$

Решение радиального уравнения (3.20) имеет вид:

$$R_{nl}(r) = e^{-nr}r^l L_{n,l}(r), \qquad (3.23)$$

где $L_{n,l}(r)$-полиномы Лаггера, $n$ – главное квантовое число, которое может принимать значения 1, 2, 3, 4,....

Решением полярной части (3.21) уравнения Шрёдингера являются функции:

$$Y_{l,m_l}(\theta) = P_{l,m_l}(\cos\theta)\,, \tag{3.24}$$

где $P_{l,m_l}(\cos\theta)$ - полиномы Лежандра.

Решением азимутальной части (3.22) уравнения Шредингера являются функции:

$$\Phi_{m_l}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} e^{im_l\varphi}\,. \tag{3.25}$$

Главное квантовое число $n$, орбитальное (или азимутальное) квантовое число $l$, магнитное квантовое число $m_l$ могут принимать следующие значения:

$$n = 1,\, 2,\, 3,\, 4, \ldots\ldots . \tag{3.26}$$

$$l = 0,\, 1,\, 2,\, 3, \ldots ., n-1. \tag{3.27}$$

$$m_l = 0,\, \pm 1,\, \pm 2,\, \pm 3, \ldots . \pm l\,. \tag{3.28}$$

Полная энергия электрона зависит только от главного квантового числа $n$ и имеет вид:

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\,. \tag{3.29}$$

Отметим, что выражение (3.29) для энергии в точности совпадает с выражением (3.9) для энергии электрона на стационарных орбитах в атоме водорода, которое получено на основе боровской модели атома водорода.

Каждому значению энергии $E_n$ (3.29) соответствует несколько волновых функций, которые отличаются значениями квантовых чисел $l$ и $m_l$ согласно (3.27) и (3.28). Это означает, что электрон в атоме водорода имея одно значение энергии может находится в разных квантовых состояниях. Квантовые состояния с одинаковой энергией электрона называются вырожденными. Кратность вырождения, т.е. число состояний с энергией $E_n$ равно $n^2$.

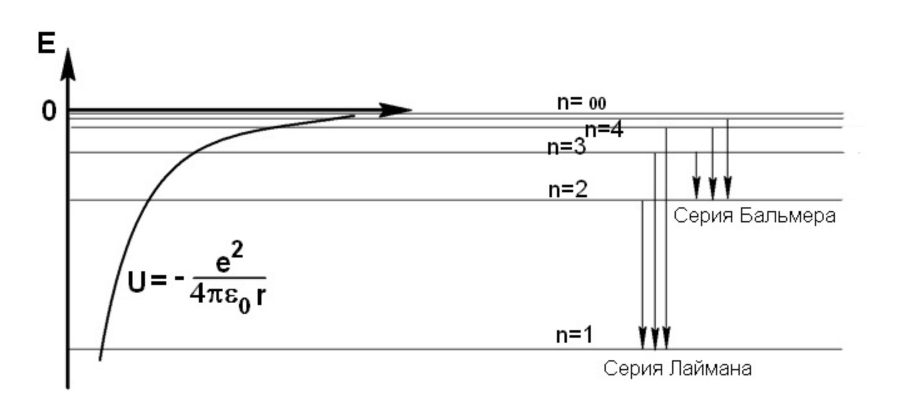



Рис. 3.7.

Рисунок 3.7 схематично показывает расположение энергетических уровней соответствующих некоторым первым значениям главного квантового числа $n$. и схему переходов электрона между этими энергетически уровнями, которые сопровождаются излучением фотонов определенной серии излучения (например, серии Бальмера и серии Лаймана, другие серии на рисунке 3.7 не показаны). Необходимо отметить, что на эти переходы накладывается условие в виде правила отбора для азимутального квантового числа $l$ в виде:

$$\Delta l = \pm 1. \tag{3.30}$$

Разрешение переходов электрона из одного состояния в другое с отбором азимутального числа $l$ согласно (3.30) связано с тем, что фотон уносит с собой при

излучении или привносит с собой при поглощении момент количества движения равный $\hbar$, поэтому (3.30) по существу является записью закона сохранения момента количества движения.

Рассмотрим радиальное распределение плотности вероятности обнаружения электрона в атоме водорода. Радиальная часть волновой функции представлена выражением (3.23). Плотность вероятности обнаружения в данной точке вдоль радиуса равна квадрату волновой функции:

$$\rho = R_{nl}(r)^* R_{nl}(r)\,. \qquad (3.31)$$

Радиальную вероятность $dP_r$ обнаружения электрона в объеме $dV_r$ (элемент объёма ограниченный сферическими поверхностями радиусами $r$ и $r+dr$) можно представить в виде:

$$dP_r = \rho 4\pi r^2 dr\,. \qquad (3.32)$$

где $P_r = \rho 4\pi r^2$ представляет плотность радиальной вероятности обнаружения электрона в пространстве между двумя концентрическими сферами с радиусами $r$ и $r+dr$.

На рисунках 3.8 и 3.9 графически показано изменение радиальной вероятности обнаружения электрона $P_r$ в зависимости от расстояния вдоль радиуса выраженного в единицах $r_1$ ($r_1 = 0{,}53\overset{0}{A}$– радиус Бора). Отметим, что для каждого случая, например для $s$ ($l=0$) и $p$ ($l=1$) – состояний можно выделить наибольший максимум вероятности обнаружения электрона на одном из этих расстояний вдоль радиуса. Таким образом появляется правило размещения электронов в определенных оболочках вокруг ядра. Однако имеется определенная вероятность размещения электронов и на таких расстояниях, которые отличаются от теории Бора.

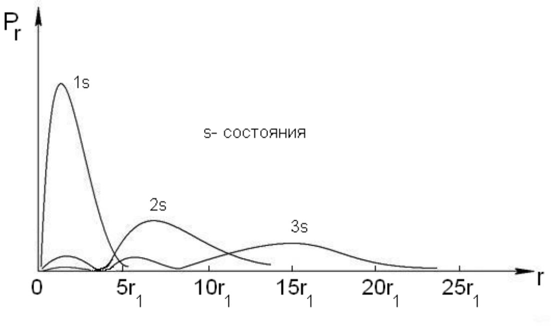



Рис. 3.8.

## 3.4. Спин электрона

При тщательном изучении спектров излучения атомов было установлено, что все спектральные линии представляют собой дублеты, т.е две близко расположенные спектральные линии. Такое расщепление известно под названием тонкой структуры атомного спектра.

Что бы объяснить такое расщепление спектральных линий надо допустить, что электрон подобен волчку и имеет собственный момент количества движения связанного с вращением.

В 1925 г. С. Гаудсмит и Д. Уленбек предположили, что электрон совершает вращательное движение вокруг своей собственной оси. В соответствии с этой

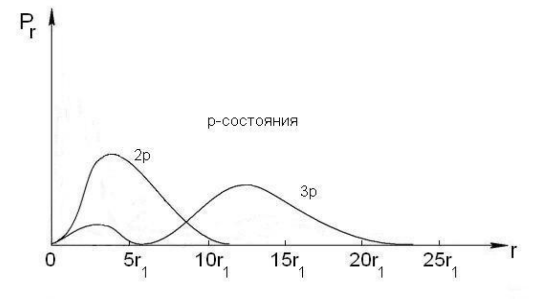



Рис. 3.9.

гипотезой, вращающийся электрон должен обладать собственным магнитным моментом $\vec{\mu}_s$ и механическим моментом импульса $\vec{L}_s$, который называется спиновым моментом или спином. Наблюдатель, двигающийся вместе с электроном заметит, что протон обращается по такой же орбите вокруг электрона как электрон вращается вокруг протона. Это относительное движение заряженного протона создает магнитное поле $\vec{B}$ в месте расположения электрона. Это магнитное поле взаимодействует с магнитным моментом электрона. Поэтому к энергии электрона в кулоновском поле протона, которое дается выражением (3.29) надо добавить дополнительную энергию равную:

$$\Delta E_s = -\vec{\mu}_s \vec{B}, \quad (3.33)$$

и которая является результатом так называемого спин-орбитального взаимодействия.

Приняв к рассмотрению новую степень свободы связанную с собственным вращением необходимо вести новое квантовое число – спиновое квантовое число – s., которое имеет только одно единственное значение, равное $1/2$. Величину собственного момента импульса электрона или спин электрона можно определить согласно формуле:

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}, \quad (3.34)$$

Учитывая значение величины $s$ получается единственное значение для спина электрона равное:

$$L_s = \hbar\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (3.35)$$

Проекции спина $L_s$ на некоторую ось $z$ может принимать только два значения равные:

$$L_{zs} = m_s\hbar, \quad (3.36)$$

где $m_s$ – магнитное спиновое квантовое число, которое принимает только два значения:

$$m_s = \pm\frac{1}{2}. \quad (3.37)$$

Число $m_s = +\frac{1}{2}$ обозначают как «спин-вверх» ($\uparrow$), а $m_s = -\frac{1}{2}$ как «спин-вниз» ($\downarrow$). Поэтому существуют только две возможные ориентации спинового момента в заданном направлении, например в направлении вектора магнитной индукции магнитного поля, созданного протоном, который вращается вокруг электрона. Такое явление известно как пространственное квантование спинового момента (спина).

Магнитный момент и механический момент импульса жестко связаны друг с другом, т.к. оба эти параметра вытекают из вращения одного тела (электрона). В ряде других экспериментов было установлена величина так называемого гиромагнитного отношения для электрона в виде:

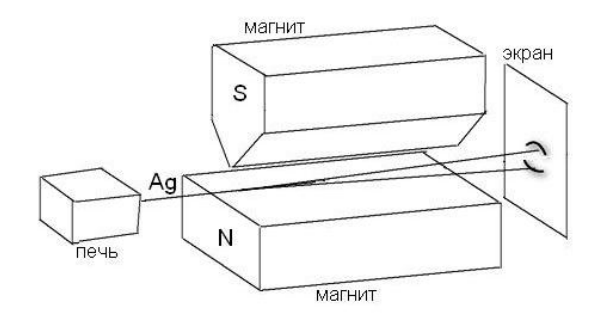



Рис. 3.10.

$$\frac{\mu_s}{L_s} = -\frac{e}{m}. \qquad (3.38)$$

Принимая во внимание однозначную связь между $\vec{\mu}_s$ и $\vec{L}_s$ в виде (3.38) получается, что из пространственного квантования спина вытекает пространственное квантование магнитного момента электрона. Поэтому, в магнитном поле электрон будет всегда иметь два дополнительных значения энергии, обусловленные спин-орбитальным взаимодействием. Таким образом, дублетное расщепление спектральных линий можно рассматривать как экспериментальное доказательство того, что электрон обладает спином.

Экспериментальным подтверждением наличия спина у электрона являются опыты Штерна и Герлаха. На рисунке 3.10 схематически представлена экспериментальная установка по определению спина у электрона. Идея эксперимента заключается в том, что магнитный момент в неоднородном магнитном поле будет втягиваться в область сильного поля или выталкиваться из области сильного поля в зависимости от взаимного направления векторов магнитного момента и магнитной индукции магнитного поля. Неоднородное магнитное поле создается за счет конусообразного полюса магнита, как показано на рисунке 3.10. В качестве частиц были выбраны атомы серебра, которые испаряясь из образца в печке и создавали атомарный пучок, который направлялся в неоднородное магнитное поле между магнитами. Для атома серебра, все электроны, за исключением последнего валентного, не проявляют своих магнитных моментов, потому что они все взаимно скомпенсированы. Только у последнего электрона собственный магнитный момент остается не скомпенсированным. При этом надо учесть, что орбитальное движение валентного электрона в атоме серебра не создает магнитный момент. Относительно оси вдоль вектора магнитного поля, спин электрона пространственно квантуется, следовательно, и магнитный момент квантуется и принимает два направления – вдоль или противоположно магнитного поля. Поэтому неоднородное магнитное поле будет растягивать исходный атомарный пучок на два пучка, в которых магнитные моменты направлены в противоположные стороны. В результате взаимодействия на экране вместо одного пятна будет наблюдаться два размытых пятна, как показано схематично на рисунке 3.10.

# Глава 4. Строение ядра

## 4.1. Состав ядра. Энергия связи

Эксперименты Э. Резерфорда показали, что атом имеет очень малое по размерам ядро ($\approx 10^{-14}$ *м* в диаметре). До 1931 года считалось, что ядро состоит из протонов и так называемых ядерных электронов, которые выполняли роль своего рода «клея» удерживающего от распада ядро, причем суммарный заряд протонов превышал суммарный отрицательный заряд электронов, ровно на столько, что бы результирующий заряд совпадал с зарядом ядра согласно экспериментальным данным. Однако существование таких электронов представлялось сомнительным, т.к. оценка энергии предполагаемых ядерных электронов с использованием соотношения неопределенностей Гейзенберга противоречит экспериментальным результатам. Действительно, принимая неопределенность координаты $\Delta x$ «ядерного» электрона равную размеру ядра $\approx 10^{-14}$ *м* из соотношения неопределенностей (1.21) находится неопределенность импульса $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} \approx 10^{-20} кг \cdot \frac{м}{с}$ Импульс электрона

должен быть не меньше этого значения. Поэтому может быть выполнена оценка нижней границы энергии электрона с учетом его релятивистского характера движения, которая приводит к значению равному $E_e \approx 20 Мэв$. Экспериментально установлено, что энергия электронов, вылетающих из ядра, а такой процесс для $\beta-$радиоактивных ядер возможен, на много ниже приведенной выше оценки энергии.

Более того, если в ядре были бы электроны, магнитный момент ядра был бы сравним по величине с магнитным моментом самого электрона. Однако эксперимент показывает, что магнитный момент ядра в тысячу раз меньше.

В 1932 Чедвиком была открыта нейтральная частица, по массе практически равная массе протона, которая входит в состав ядра. Частицу назвали нейтроном. Таким образом, на сегодня твердо установлено, что ядро состоит из протонов и нейтронов или нуклонов. Число протонов определяет общий заряд ядра, и соответственно, определяет место расположение данного элемента в таблице Менделеева. Тип атомного ядра обозначают символом ${}_Z^A B_N$ или ${}_Z^A B$, где $Z$ – число протонов (атомное число), $N$ – число нейтронов, $A = Z + N$ массовое число, т.е. полное число нейтронов и протонов. Изотопами называются ядра с одним и тем–же атомным числом $Z$ и различными массовыми числами. Ядра с одинаковым числом $A$ и разным атомными числами $Z$ называются изобарами.




Рис. 4.1.

Если ограничится существованием только кулоновской силы взаимодействия между электрическими зарядами, то в этом случае ядро не могло бы существовать. В целом ядро заряжено положительно. Протоны разлетелись бы в разные стороны. Поэтому стабильность ядра может быть объяснена существованием мощных сил притяжения между нуклонами (протонами и нейтронами). Эти силы являются проявлением так называемого сильного взаимодействия. Для объяснения ядерных сил Х.Юкава постулировал существование особой частицы ($\pi-$мезон), масса покоя которой в 270 раз больше массы покоя электрона. Сильное взаимодействие между нуклонами возникает за счет обмена между ними $\pi-$мезонами. Ядерные силы имеют следующие характерные особенности:

1. Они являются короткодействующими и силами притяжения.
2. Они обладают зарядовой независимостью.
3. Они самые мощные из всех известных сил в природе.
4. Они имеют способность к насыщению.

Короткодействующий характер проявляется в том, что ядерные силы имеют заметное значение на расстоянии порядка $10^{-15}$м и меньше. Однако при совсем малых расстояниях, порядка 0,5фм нуклоны отталкиваются друг от друга. На рисунке 4.1 качественно показан характер взаимодействия двух нуклонов.

Масс–спектрометрические измерения показывают, что масса ядра не равна суммарной массе по отдельности входящих в состав ядра нуклонов. Масса целого ядра меньше суммы масс нуклонов. Разность указанных масс называют дефектом массы $\Delta m$.

Когда $Z$ протонов и $N$ нейтронов образуют ядро, масса $\Delta m$ «пропадает» и вместо её выделяется энергия $\Delta E = \Delta mc^2$ (обычно в виде излучения $\gamma -$квантов). Эта энергия является энергией связи данного ядра и обозначается $E_{св}$. Для разрушения ядра на составные части (нуклоны) необходимо затратить энергию равную энергии связи. Энергию связи можно вычислить, пользуясь следующим выражением:

$$E_{св} = (Zm_p + Nm_n)c^2 - M_{ядра}c^2, \quad (4.1)$$

где $M_{ядра}$ – масса ядра, $m_p$ – масса протона, $m_n$ – масса нейтрона.

Экспериментальная работа по определению энергии связи всех существующих в природе стабильных ядер была выполнена. На рисунке 4.2 представлена зависимость энергии связи в зависимости от атомного числа $A$ ядра, приходящаяся на один нуклон. Из этого графика хорошо видно, что ядра, имеющие средние значения атомного числа обладают более высокой энергией связи, чем на краях всего ряда ядер. Исходя из этого графика вытекает очень важное следствие, касающееся принципиальной возможности получения энергии при преобразовании одних ядер в другие. При изменении энергии связи ядра разница уходит в кинетическую энергию ядер их поступательного движения. Действительно, открыты и эксплуатируются человеком несколько типов ядерных реакций, в которых реализованы реакции или слияния или деления ядер, когда изменяется энергия связи и при этом выделяется большое количество энергии.

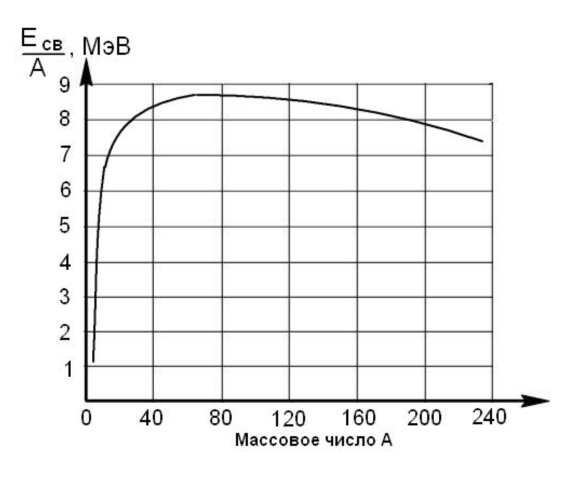



Рис. 4.2.

В природе наблюдается 272 стабильных ядра. Их можно разбить на 4 группы в соответствии с тем, четны или нечетны в них числа протонов и нейтронов. Оказывается, что четно-четных ядер 160, четно-нечетных 56, нечетно-четных 52 и нечетно-нечетных всего 4. Совершенно очевидно, что природа предпочитает четное количество протонов и нейтронов.

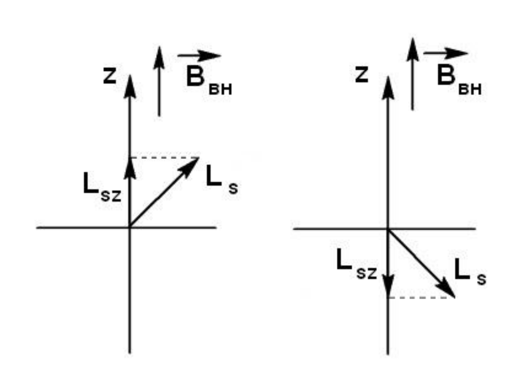



Рис. 4.3.

Для стабильных ядер с $Z < 20$ число протонов практически равно числу нейтронов. Для более тяжелых ядер (при $Z > 20$) число нейтронов превышает число протонов. Такая тенденция превышение числа нейтронов над числом протонов становится более отчетливой с ростом $Z$. С увеличением $Z$ растет кулоновское отталкивание между протонами, поэтому число нейтронов становится существенно большим, что бы за счет ядерного взаимодействия скомпенсировать растущий эффект отталкивания.

Так же как и электрон, протон и нейтрон имеют собственный момент импульса. Это спиновый момент, или спин, величину которого можно рассчитать по формуле:

$$L_s = \hbar\sqrt{I(I+1)}\,, \tag{4.2}$$

где $I$ – квантовое число, обычно просто называется спином и равно ½. Поэтому спиновый момент протона или нейтрона равен:

$$L_s = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar\,. \tag{4.3}$$

При наличии внешнего магнитного поля спиновый момент пространственно квантуется. Проекции спинового момента на ось $z$, которая параллельно направлению магнитного поля с магнитной индукцией $\vec{B}_{вн}$ может принимать только два значения:

$$L_{sz} = \pm\frac{1}{2}\hbar\,. \tag{4.4}$$

Пространственное квантование спина показано схематически на рисунке 4.3.
Электрон обладает магнитным моментом, связанным со спином, равным 1 боровскому магнетону:

$$\frac{e\hbar}{2m_e}\ (\mu_B = 5{,}05\cdot10^{-27}\,\text{Дж/Тл}). \tag{4.5}$$

Атомное ядро, аналогично, тоже обладает магнитным моментом и для него используется ядерный магнетон равный:

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}\,, \tag{4.6}$$

где $m_p$ – масса протона, которая в 1836 раз больше массы электрона. Соответственно ядерный магнетон в 1836 раз меньше по величине, чем боровский магнетон. Проекции магнитных моментов протона и нейтрона на ось $z$ соответственно равны:

$$\mu_{pz} = +2{,}79\ \mu_N\,; \tag{4.7}$$

$$\mu_{nz} = -1{,}91\mu_N\,. \tag{4.8}$$

Отрицательный знак проекции магнитного момента нейтрона на ось $z$ означает, что он направлен против направления собственного момента импульса (спина).

## 4.2. Радиоактивность

Явление радиоактивности, или превращение ядер друг в друга, было открыто А. Беккерелем, когда он случайно положил кусочек урановой руды на фотографическую пластинку. После проявления пластинки он обнаружил черные пятна. Какое-то неизвестное излучение испускалось урановой рудой и оставляло на пластинке изображение, имеющее форму куска руды.

Резерфорд установил, что излучение радиоактивных веществ в магнитном поле разделяется на $\alpha-$частицы (ядра гелия) и $\beta-$ частицы (электроны). Немного позднее П. Виллард обнаружил третью компоненту излучения, представляющую собой $\gamma-$излучение и не отклоняющееся в магнитном поле. Ядро, изменяющее свою структуру испускает $\gamma-$ излучение или другие ядерные частицы, например $\alpha, \beta-$частицы. Естественным радиоактивным распадам ядер соответствуют нижеприводимые процессы:

$$\alpha-\text{распад: } {}^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}M + {}^{4}_{2}He\,; \tag{4.9}$$

$$\beta^- - \text{распад: } {}^A_ZM \rightarrow {}^{\quad A}_{Z+1}M + e^- + \tilde{\nu}\,; \tag{4.10}$$

$$\beta^+ - \text{распад: } {}^A_ZM \rightarrow {}^{\quad A}_{Z-1}M + e^+ + \nu\,; \tag{4.11}$$

$$\beta^- - \text{захват: } {}^A_ZM + e^- \rightarrow {}^{\quad A}_{Z-1}M + \nu\,; \tag{4.12}$$

$$\gamma - \text{распад: } ({}^A_ZM)^* \rightarrow {}^A_ZM + \gamma\,. \tag{4.13}$$

В этих выражениях $\nu$ и $\tilde{\nu}$ обозначают нейтрино и антинейтрино соответственно, символом $({}^A_ZM)^*$ обозначается ядро в возбужденном состоянии.

Пусть $dN$ – число распавшихся ядер (в соответствии с одним из выше указанных процессов (4.10 – 4.13) за время $dt$. Тогда вероятность $\lambda$ данного радиоактивного распада для данного вида ядра в единицу времени можно определить следующим образом:

$$\lambda = -\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = const\,. \tag{4.14}$$

Знак «минус» появляется потому, что $dN < 0$. Постоянная $\lambda$ называется постоянной распада. Активностью данного радиоактивного образца называют величину:

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N\,. \tag{4.15}$$

Она характеризует число распадов, происходящих с ядрами данного образца в 1 секунду. Активность измеряют в единицах – кюри(Кю): $1 Кю = 3{,}7\cdot 10^{-10}\, расп/с$.

Рассматривая выражение (4.15) как дифференциальное уравнение относительно функции $N = N(t)$ можно найти явный вид этой функции:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}\,, \tag{4.16}$$

где $N_0$ – начальное число ядер, $N(t)$ – число ядер в момент времени $t$. Это выражение носит название закона радиоактивного распада.

Период полураспада $T_{1/2}$ данного радиоизотопа (данный вид радиоактивного ядра) определяется как время, за которое распадается ровно половина первоначального числа ядер. Время полураспада и вероятность распада связаны между собой выражением:

$$T_{1/2} = \frac{0{,}693}{\lambda}\,. \tag{4.17}$$

В природе найдено 14 радиоактивных ядер, периоды распада $T_{1/2}$ которых такого же порядка как и возраст Вселенной (приближенно считается равным $4{,}5\cdot 10^9$ лет). Среди них только три ядра ($Th-232, U-235, U-238$) распадаются в дочерние ядра, которые в свою очередь также распадаются и т.д. пока не получаются стабильные ядра. Таким образом получаются три семейства радиоактивных ядер, которые заканчиваются тремя изотопами свинца: $Pb-208, Pb-207, Pb-206$. Существует еще одно семейство радиоактивных ядер, родоначальником которого является нептуний (${}^{237}_{93}Np$). Однако из-за того, что период полураспада нептуния сравнительно небольшой, следы его в природе найти невозможно. Только с открытием трансурановых элементов появилась возможность обнаружить следы нептуниевого семейства, которое начинается с америция и нептуния.

Для измерения интервалов времени может быть использован процесс распада радиоактивного распада благодаря тому, что на этот процесс не оказывают влияния ни физические, ни химические условия, в которых находятся распадающиеся ядра. С помощью

метода «урановой» датировки измеряют интервалы времени в миллионы лет. Эта методика базируется на определении отношения свинца и урана, как представителей начала и конца семейства радиоактивных ядер.

Для своего роста все растения используют углекислый газ, который поглощается ими из атмосферы. Часть углерода представляет собой радиоактивный изотоп $C-14$, поэтому растения немного радиоактивны. Если растение погибает, радиоактивный изотоп больше в него не поступает а количество уже имеющегося в растении начинает уменьшаться за счет распада согласно закона радиоактивного распада (4.16). Измеряя относительное количество изотопов $C-14$ и $C-12$ в археологических останках можно достаточно точно датировать исторические события.

*Альфа-распад*. Большинство тяжелых ядер ($Z \geq 84, A \geq 208$) распадаются с испусканием $\alpha -$частиц по схеме:

$$ {}_{Z}^{A}X \rightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}He , \tag{4.18}$$

где ${}_{Z}^{A}X$ и ${}_{Z-2}^{A-4}Y$ родительское и дочернее ядро соответственно.

Энергетический эффект $Q$ данной ядерной реакции можно вычислить по следующей формуле:

$$Q = K_Y + K_\alpha = \left[m_X - (m_Y + m_\alpha)\right]c^2 > 0 , \tag{4.19}$$

где $K_Y$ и $K_\alpha$ кинетическая энергия дочернего ядра и $\alpha -$частицы соответственно. Благодаря тому, что массовое число дочернего ядра во много раз больше массового числа ядра гелия $\alpha -$частица уносит практически всю энергию, которая выделяется при $\alpha -$распаде в форме кинетической энергии. Например, изотоп полония $Po-214$ испускает $\alpha -$частицы с энергией $7{,}7 МэВ$.

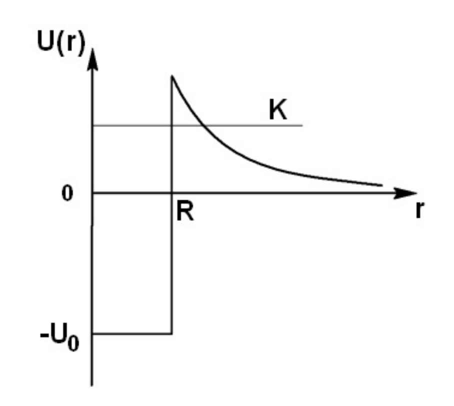


Рис. 4.4.

Вследствие того, что $\alpha -$частицы массивные и имеют двойной электрический заряд ($+2e$) длина их свободного пробега в веществе невелика. Большинство $\alpha -$частиц поглощаются слоем воздуха толщиной несколько сантиметров.

Существует простое соотношение между периодом полураспада $\alpha -$изотопа и энергией $K$ испускаемых им $\alpha -$частиц. Впервые оно было установлено эмпирически Гейгером и Наталла:

$$\ln T_{1/2} = A \ln K + B , \tag{4.20}$$

где $A$ и $B$ постоянные, имеющие определенные значения для каждого семейства. Этот закон теоретически обосновал Гамов, объяснив его квантовомеханическим туннельным эффектом. Согласно квантовомеханических расчетов, альфа частица (кластер из двух протонов и двух нейтронов) в ядре наталкивается с внутренней стороны на потенциальный барьер ядерных сил, которые удерживают ядро воедино. Вид потенциального поля, в котором находятся нуклоны в ядре схематически показан на рисунке 4.4. Пользуясь теорией туннельного эффекта можно сделать оценку, что примерно в одном случае из $10^{38}$ частица может просочиться сквозь барьер и выйти из ядра. $\alpha -$Частица движется в ядре со скоростью порядка $10^7$ м/с, поэтому, при диаметре ядра порядка $10^{-14}$ м каждую секунду

происходит около $10^{21}$ столкновений с барьером. Таким образом требуется около $10^{17}$ секунд или $3 \cdot 10^9$ лет для того что бы $\alpha -$частица совершила возможный вылет.

*Позитронный бета-распад.* Позитронный распад или $\beta^+ -$распад схематически представлен уравнением:

$$ {}^A_Z X \rightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + e^+ + \nu , \qquad (4.21) $$

Нейтрино ($\nu$) трудно уловимая частица без электрического заряда и близкой к нулю массой. Теоретически её предсказал Паули, а экспериментально она была обнаружена в 1956 г.

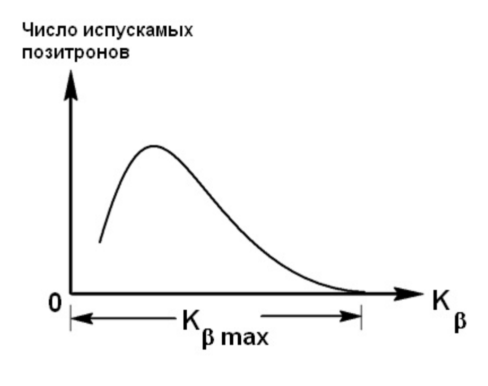



Рис.4.5.

Энергетический эффект $Q$ рассматриваемой ядерной реакции (4.21) равен:

$$ Q = K_Y + K_{e^+} + K_\nu = (m_X - m_Y - m_{e^+})c^2 , \qquad (4.22) $$

Энергетический спектр позитронов в реакции позитронного распада непрерывный с резким краем при определенной энергии, как схематически показано на рисунке 4.5. Что бы объяснить непрерывный спектр энергий позитрона необходимо было ввести третью частицу – нейтрино. Если бы не было испускаемых нейтрино, то пучок позитронов был бы монохроматическим, так как все позитроны имели бы одинаковый импульс равный импульсу дочернего ядра, т.к. родительское ядро практически покоится. При введении в реакцию нейтрино закон сохранения импульса получаем в следующем виде:

$$ \vec{P}_M + \vec{p}_\beta + \vec{p}_\nu = 0 . \qquad (4.23) $$

В этом случае импульсы $\vec{P}_M$, $\vec{p}_\beta$, $\vec{p}_\nu$ теперь могут принимать непрерывные различные значения.

Позитронный распад ядра можно интерпретировать как реакцию превращения одного протона, находящегося в ядре, в нейтрон с испусканием позитрона и нейтрино. Это ядерное превращение можно записать в таком виде:

$$ {}^1_1 p \rightarrow {}^1_0 n + e^+ + \nu \ . \qquad (4.24) $$

Принимая во внимании, что масса протона меньше массы нейтрона подобная ядерная реакция не возможна для свободного протона.

*Электронный бета-распад.* Электронный $\beta^- -$распад схематически записывается в виде:

$$ {}^A_Z X \rightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + e^- + \tilde{\nu} . \qquad (4.25) $$

где $\tilde{\nu} -$ антинейтрино. Это античастица нейтрино.

Энергетический спектр испущенных электронов будет непрерывным с некоторой максимальной энергией и таким же видом распределения как у позитронов (рисунок 4.5). При максимальной энергии в спектре, которая равна максимальной энергии испущенного электрона для антинейтрино и дочернего ядра будут $K_{\tilde{\nu}} = 0$ и $K_Y = 0$ соответственно.

Дочернее ядро в результате $\beta^-$ – распада имеет на один протон больше чем родительское ядро, при этом число нейтронов уменьшается тоже на единицу. Это позволяет считать, что в ядре происходит распад нейтрона по схеме:

$$ {}_0^1n \rightarrow {}_1^1p + e^- + \tilde{\nu} . \qquad (4.25)$$

Распад свободного, т.е. не находящегося в ядре нейтрона происходит с периодом полураспада $T_{1/2}$ равным $\approx 18$ минут.

*Электронный захват.* Атомное ядро может захватить один из орбитальных электронов. Наиболее вероятный захват может быть электрона наиближайшей оболочки. Это $K$ – оболочка. Захват электрона возможен также с $L$ и $M$ – оболочек, но такой процесс менее вероятен.

Уравнение для $K$ – захвата можно записать в виде:

$$ {}_Z^AX + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^{A}Y + \nu . \qquad (4.26)$$

Поскольку в результате $K$ – захвата образуется ядро с другим числом протонов, то происходит перестройка электронных оболочек. Такая электронная перестройка сопровождается характеристическим рентгеновским излучением.

Реакцию $K$ – захвата можно интерпретировать как реакцию:

$$ {}_1^1p + e^- \rightarrow {}_0^1n + \nu , \qquad (4.27)$$

которая происходит с одним из протонов. Энергетический спектр дочерних ядер и нейтрино монохроматический.

*Гамма-распад.* Ядра в основном состоянии имеют наименьшее значение энергии. Однако ядро можно возбудить, например, бомбардировкой частицами или фотонами. Кроме этого в возбужденном состоянии может оказаться дочернее ядро после определенной ядерной реакции. Возвращаясь в основное состояние ядро испускает $\gamma$ – квант. Этот процесс происходит как с радиоактивными так и со стабильными ядрами. Схематически $\gamma$ – распад описывается уравнением:

$$ ({}_Z^AX)^* \rightarrow {}_Z^AX + \gamma . \qquad (4.28)$$

Звёздочка означает, что ядро находится в возбужденном состоянии. Если $E^*$ – энергия возбужденного, а $E$ – энергия основного состояния, то $\gamma$ – квант должен иметь энергию:

$$ h\nu = E^* - E . \qquad (4.29)$$

где $\nu$ – частота $\gamma$ – кванта. Так как распадающееся ядро первоначально покоилось, то согласно закону сохранения импульса, оно должно после реакции приобрести импульс отдачи $P_Y$ равный по абсолютному значению импульсу испущенного фотона:

$$ P_Y = \frac{hc}{\lambda} . \qquad (4.30)$$

Гамма-кванты не замедляются при прохождении через вещество, хотя интенсивность уменьшается согласно закона:

$$ I(x) = I_0 e^{-\mu x} , \qquad (4.31)$$

где $\mu$ – коэффициент поглощения, $x$ – толщина слоя поглощения $\gamma$ – излучения. Гамма – кванты не имеют определенной длины пробега в веществе, однако интенсивность излучения

убывает вследствие следующих эффектов: фотоэффекта, эффекта Комптона, эффекта рождения электрон–позитронных пар.

## 4.3. Ядерные реакции

Если об ядро ударяется частица, обладающая большой энергией и ядро изменяет свои свойства или вообще изменяется, то принято считать, что происходит ядерная реакция. Первая ядерная реакция была осуществлена Э.Резерфордом в 1919 г., в которой с помощью $\alpha-$частиц, обладающих энергией $7{,}7 МэВ$ происходило превращение ядра азота в ядро кислорода:

$$ {}_2^4He + {}_7^{14}N \rightarrow {}_1^1H + {}_8^{17}O . \tag{4.32} $$

Такой тип реакции схематически можно записать в виде:

$$ x + X \rightarrow y + Y \text{ или сокращенно } X(x, y)Y , \tag{4.33} $$

где $X, Y -$ соответственно родительское и дочернее ядро.

До построения ускорителей частиц для проведения ядерных реакций пользовались естественными радиоактивными источниками $\alpha-$ и $\beta-$частиц, что значительно ограничивало число возможных ядерных реакций.

В ядерных реакциях выполняются следующие законы сохранения:

1. Закон сохранения заряда. Сумма электрических зарядов частиц и ядер, вступающих в реакцию, равна сумме электрических зарядов частиц и ядер, образующихся в реакции.
2. Сохранение полного числа барионов (нуклонов). Сумма массовых чисел частиц и ядер до и после реакции должны равняться друг другу.
3. Сохранение лептонного заряда. Электрон и нейтрино относятся к так называемым лептонам, которым приписывается лептонный заряд $+1$, а их античастицам $-1$.
4.Сохранение импульса.
5. Сохранение момента импульса.

*Энергетический эффект Q ядерной реакции.* В реакции $X(x, y)Y$ $X -$ ядро – мишень, которое предполагается покоящимся, $x-$частица, налетающая на ядро мишень, $Y-$ядро отдачи и $y-$получаемая частица. Закон сохранения энергии для данной реакции можно записать в виде:

$$ m_x c^2 + K_x + M_X c^2 = K_y + K_Y + m_y c^2 + M_Y c^2 . \tag{4.34} $$

Здесь $m_x c^2$, $M_X c^2$, $m_y c^2$, $M_Y c^2 -$ соответственно энергия покоя налетающей частицы, ядра–мишени, получаемой частицы и ядра отдачи. Энергетический эффект реакции определяется как разность между суммой энергий покоя налетающей частицы и мишени и суммой энергий покоя получаемой частицы и ядра отдачи:

$$ Q = \left[(m_x + M_X) - (m_y + M_Y)\right]c^2 = K_y + K_Y - K_x . \tag{4.35} $$

Когда начальная масса больше конечной, т.е. $(m_x + M_X)$ > $(m_y + M_Y)$ часть массы теряется и превращается в энергию $\Delta E$ которую можно представить в виде:

$$ \Delta E = (\Delta m)c^2 , \tag{4.36} $$

где $\Delta m -$ потеря массы или дефект массы.

В рассматриваемом случае $Q > 0$. Такие реакции называются экзотермическими, так как в них энергия выделяется. В случае, если $(m_x + M_X) < (m_y + M_Y)$ конечная масса больше первоначальной, т.е. масса образуется за счет расходования энергии, в данном случае кинетической энергии налетающей частицы. Поэтому для данной реакции $Q < 0$ и такого типа реакции называются эндоэнергетическими.

*Вероятность реакции.* Даже когда энергетический эффект $Q > 0$ нет полной вероятности, что такая реакция произойдет. Вероятность реакции определяется так называемым эффективным сечением $\sigma$. Эффективное сечение реакции есть площадь некоторой воображаемой площадки, попадая в которую подающая частица вызывает реакцию со 100% вероятностью.

В качестве примера рассмотрим ядерную реакцию радиационного захвата нейтрона с ядром. Из самого названия реакции следует, что реакция сопровождается испусканием $\gamma -$ лучей. В качестве конкретного примера можно привести реакцию:

$$ {}_0^1n + {}_{13}^{27}Al \rightarrow {}_{13}^{28}Al + \gamma . \quad (4.37) $$

Медленные нейтроны хорошо взаимодействуют с ядрами. Нейтроны с энергией около $1 МэВ$ взаимодействуют с ядрами в виде рассеивания. При рассеивании нейтрон теряет часть энергии при передаче её ядру. При многократном рассеивании нейтрона энергия нейтрона может уменьшится до тепловой энергии порядка $kT$, где $k -$ постоянная Больцмана, $T -$ абсолютная температура. Нейтроны с энергией порядка $kT$ называются тепловыми. При комнатной температуре ($300K$) энергия теплового нейтрона $0{,}026 эВ$.

Рассмотрим два типа реакций имеющих чрезвычайно важное значение с точки зрения получения энергии. Это реакции деления и слияния ядер.

В 1934 г. Э. Ферми проводил эксперименты по облучению ядер урана нейтронами. В результате облучения уран проявлял искусственную $\beta -$ активность. Ферми объяснил появившуюся активность тем, что в результате облучения нейтронами появляются ядра с $Z > 92$, т.е. так называемые трансурановые элементы. Это предположение, однако, оказалось неверным. В результате химического анализа облученного нейтронами урана было установлено, что в исходном веществе присутствует изотоп бария ${}_{56}^{141}Ba$. Вслед за этим в 1939 г. была выдвинута гипотеза, что под действием нейтрона ядро урана претерпевает реакцию деления, в результате которой расщепляется на два ядра примерно одинаковой массы. Как рассматривалось выше, медленные нейтроны имеют большое эффективное сечение радиационного захвата. Для тепловых нейтронов падающих на ${}_{92}^{235}U$ сечение захвата $\sigma \approx 550\ б$. Реакция деления ядер урана схематически может быть написана в виде:

$$ {}_{92}^{235}U + {}_0^1n \rightarrow {}_{92}^{236}U^* \rightarrow X + Y + нейтроны , \quad (4.38) $$

где ${}_{92}^{236}U^* -$ крайне нестабильный изотоп урана, $X$ и $Y -$ ядра фрагменты (осколки), получаемые при делении ядра урана. $\beta -$ Активность, которая наблюдается после облучения урана нейтронами происходит от радиоактивных распадов $X$ и $Y$ осколков деления ядер урана.

Когда ${}_{92}^{235}U$ захватывает медленный нейтрон, энергия последнего распределяется между нуклонами ядра. Это вызывает деформацию ядра и вследствие кулоновского

отталкивания протонов происходит разрыв ядра на два осколка. Распределение осколков деления по массовым числам показано на рисунке 4.6.

Все осколки деления ядра урана имеют избыток нейтронов. Из-за этого избытка нейтронов все осколки почти сразу в течении отрезка времени порядка $10^{-13}c$ испускают нейтроны. Энергия этих так называемых быстрых нейтронов от 1 до 3 $МэВ$. Кроме этих нейтронов имеется группа задержанных по времени нейтронов, которые испускаются с периодом полураспада несколько секунд. Эта группа нейтронов очень важна с точки зрения управления ядерными реакциями, происходящими в атомном реакторе.

При реакции деления ядра урана выделяется большое количество энергии равное $Q = 208 МэВ$. Для сравнения в одном акте химической реакции горения выделяется порядка $4\ эВ$.

Нейтроны, которые получаются в результате реакции деления могут снова участвовать в новых актах реакции деления ядер урана. В 1942 г. Ферми впервые осуществил самоподдерживающуюся, так называемую цепную реакцию деления в уране. Контроль за нейтронами – самое главное при поддержании цепной реакции. Быстрые нейтроны необходимо замедлить до тепловых энергий в замедлителе. Самым лучшим замедлителем был бы водород, нейтроны в нем замедлялись бы просто за счет упругих столкновений. Однако в водороде идёт реакция радиационного захвата

$$ {}_{1}^{1}H(n,\gamma){}_{1}^{2}H \tag{4.39} $$

имеющая большое эффективное сечение. Поэтому нейтроны сильно поглощаются и выводятся из игры. Самым лучшим замедлителем является тяжелая вода ${}_{1}^{2}H_2O$, далее идет С (углерод), в которых сочетается малое сечение ядерной реакции радиационного захвата и в тоже время высокая способность для упругого взаимодействия с нейтронами, при котором нейтроны теряют энергию и становятся тепловыми.

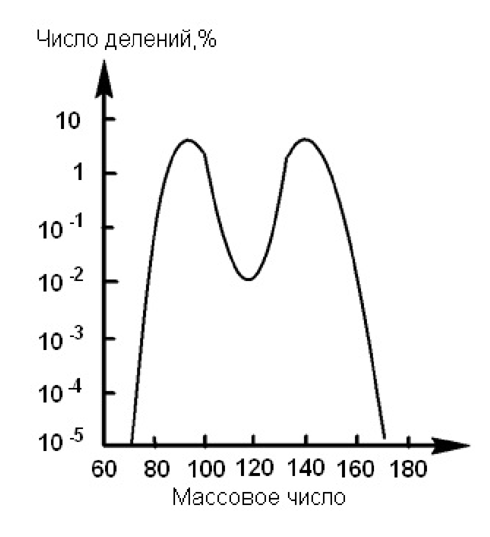


Рис. 4.6.

Чистый металлический уран содержит 99,3% изотопа ${}_{92}^{238}U$ и 0,7% изотопа ${}_{92}^{235}U$. Быстрые нейтроны сильно поглощаются ${}_{92}^{238}U$ и не могут выполнять роль инициаторов реакции деления ${}_{92}^{235}U$. Поэтому для атомных реакторов необходимо обогащение исходной природной смеси изотопов с целью увеличения доли изотопа ${}_{92}^{235}U$.

Для контроля необходимого числа нейтронов в активной зоне атомного реактора применяются специальные поглощающие стержни, изготовленные из хорошо поглощающих элементов, например кадмий, бор. Как указывалось выше большая часть нейтронов образуется практически мгновенно. Поэтому механический контроль концентрации тепловых нейтронов в активной зоне атомного реактора с помощью стержней был бы не возможен, если бы не было задержанных по времени на несколько секунд нейтронов.

Естественного изотопа ${}_{92}^{235}U$, который делится тепловыми нейтрона, в природе мало, поэтому через некоторое время реакторы на урановом топливе могут стать не экономичными. Однако есть реакторы – размножители, которые обходят эту проблему

следующим образом. В результате захвата изотопом урана $^{238}_{92}U$ нейтрона и последующих 2-х последовательных $\beta-$распадов $^{235}_{92}U$ превращается в плутоний $^{239}_{94}Pu$, который аналогично $^{235}_{92}U$ тоже делится тепловыми нейтронами. Реактор рассчитывается так, что бы нейтронов хватало и для цепной реакции с участием плутония $^{239}_{94}Pu$ и для образования достаточного количества плутония из изотопа урана $^{238}_{92}U$.

*Слияние (синтез) ядер.* Солнце излучает колоссальное количество энергии и при этом заметно не охлаждается. Этот факт был непонятен до тех пор, пока не открыли существование ядерных реакций. В 1938 г. была выдвинута гипотеза, что за энергию высвобождаемой Солнцем отвесттвены реакции слияния легких ядер и получением одного более тяжелого. Как видно на кривой энергии связи (рисунок 4.2), объединение двух легких ядер относящихся к левому быстро возрастающему участку этой кривой дает ядро с большей энергией связи. Суммарная масса исходных ядер должна уменьшится в результате чего энергетический эффект $Q$ получается положительным и энергия будет высвобождаться. При высоких температурах и давлениях в Солнце кулоновское отталкивание легко может быть преодолено и ядра за счет ядерных сил могут сливаться.

В связи с тем, что водород является самым распространенным элементом во Вселенной, предполагается, что в звездах (и Солнце) осуществляется так называемый «протон–протонный цикл», который содержит 3 реакции слияния ядер:

$$^{1}_{1}H+^{1}_{1}H\rightarrow^{2}_{1}H+e^{+}+\nu \quad (4.40)$$

$$^{2}_{1}H+^{1}_{1}H\rightarrow^{3}_{2}He+\gamma \quad (4.41)$$

$$^{3}_{2}He+^{3}_{2}He\rightarrow^{4}_{2}He+2^{1}_{1}H \quad (4.42)$$

В результате всех этих реакций из четырёх ядер водорода образуется одна $\alpha-$частица, 2 позитрона, 2 $\gamma-$кванта и 2 нейтрино. Энергия, выделяемая в этом цикле равна $26{,}6\ МэВ$.

Ядерную реакцию слияния можно в принципе использовать для создания контролируемого источника энергии. На сегодняшний день исследуется два способа проведения управляемых реакций. Основная проблема управляемой реакции связана с необходимостью разогреть плазму, содержащую протоны, до колоссальной температуры в несколько десятков миллионов градусов. В одном из способов плазма находится в магнитной ловушке и не соприкасается со стенками, в другом методе используется сжатие мишени с протонами с помощью мощного лазерного излучения.

## 4.4. Детекторы элементарных частиц

В конце XIX века стало понятно, что окружающая материя построена из атомов разного типа. Атомы отвечают за химические свойства вещества и наблюдаемое многообразие явлений в природе. Как уже было сказано ранее, важнейший шаг в понимании структуры атомов сделал Дж.Томсон, который в 1897 г. открыл субатомную частицу – электрон. Это факт в дальнейшем позволил выдвинуть следующие концепции. Кроме электрона должны существовать другие субатомные частицы размером меньше чем атом. Свойства этих частиц можно характеризовать определенными физически величинами, например электрическим зарядом, массой, магнитным моментом. Эти физические величины позволяют идентифицировать субатомные частицы.

К нашему времени установлено существование широкого списка субатомных части, которые стали называть элементарными частицами. Набор квантовых чисел характеризующих отдельную элементарную частицу, включает значение её массы покоя, её электрического заряда, связанного с частицей внутреннего момента импульса, значения особых «зарядов» частицы показывающих как они взаимодействуют друг с другом. Квантовые числа характеризуют наблюдаемые физические величины, т.е. они сами имеют четкий физический смысл, при этом надо учитывать, что все измерения в конечном итоге над элементарными частицами основываются на измерениях пространственных и временных интервалов. Ознакомимся с некоторыми методами регистрации элементарных частиц.

*Ядерные фотоэмульсии.* Частицы имеют очень малые размеры, порядка $10^{-15} м$ в диаметре. Поэтому их невозможно регистрировать с помощью обычных средств, например микроскопов даже самых мощных. Необходимо чтобы частица изменила свойства, например оптические, области значительно большие её собственных размеров. В результате этого изменения такая область может наблюдаться обычными приборами. В качестве регистрирующей среды может выступать не проявленная фотоэмульсия. На своем пути частица встретит большое количество зерен галоида серебра каждое из которых размерами порядка $10^{-6} м$. Возбуждение небольшого числа атомов электрическим полем частицы в каждом зерне приводит к почернению всего зерна при проявлении фотоэмульсии. Таким образом получается увеличенное в несколько десятков тысяч раз область по которой прошла частица. Цепочка таких зерен очерчивает траекторию частицы пролетевшей через эмульсию.

*Камера Вильсона.* Такая камера предназначена для наблюдения треков заряженных частиц. Принцип работы основан на конденсации жидкости из пересыщенного пара. При адиабатическом расширении, посредством быстрого перемещения поршня, объема камеры в которой находится воздух и пары спирта создаются условия для пересыщения паров при охлаждении газа. Электрически заряженные ионы служат центрами конденсации. Если эти ионы получались от пролета заряженной частицы, то в камере ясно виден трек частицы.

*Пузырьковая камера.* В камере Вильсона из-за низкой плотности рабочего вещества (смесь воздуха и паров спирта) невозможно было регистрировать многие частицы, т.к они успевали вылететь из рабочего объема не создав необходимого количества ионов. Для решения такого рода задач регистрации была создана пузырьковая камера, которая в некотором смысле является усовершенствованием камеры Вильсона. В пузырьковой камере пересыщенный пар заменили на перегретую жидкость. В этом случае ионы становятся центами кипения. Поэтому при прохождении заряженной частицы через камеру появляются микроскопические разрывы в жидкости, т.е. появляются маленькие пузырьки, расположенные вдоль трека частицы. Далее трек фиксируется фотографированием. Поскольку плотность жидкости более чем в 1000 раз больше плотности газа в пузырьковой камере становится реальностью наблюдать взаимодействие высокоэнергетических частиц друг с другом.

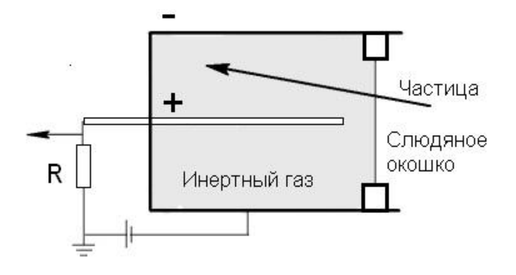



Рис. 4.7.

*Искровая камера.* Искровая камера представляет собой прибор регистрации частиц, в котором есть набор пластин параллельных плоских проводящих пластин, к которым подсоединен высоковольтный источник постоянного высокого напряжения (около $20 кВ$). Вследствие этого между

соседними пластинами создается высокая напряженность электрического поля. Электрические разряды начинаются в областях, где создаются ионы, так что в результате вся траектория движения частицы оказывается очерчена серией искр.

*Ионизационная камера.* Большой класс детекторов элементарных частиц работает на принципе собирания ионов, которые образуются при пролете частицы в данном объеме и последующем регистрации электрического сигнала, который возникает во внешней цепи. Одним из простейших детекторов такого типа является ионизационная камера. Эта камера заполнена газом, ионы которого имеют сравнительно большое время жизни. Газ находится под некоторым давлением с целью увеличить чувствительность детектора, потому что с увеличением давления увеличивается число молекул газа, с которыми может про взаимодействовать влетевшая в объем частица.

Общее число ионов пропорционально энергии выделяемой частицей в газе. Заряженные ионы собираются на электродах, поэтому их потенциал возрастает. Выходной сигнал после усиления как раз будет пропорционален потенциалу. Ионизационная камера используется для детектирования и определения одновременного пролета большого числа частиц.

Простейшая камера, как показано на рисунке 4.7, представляет собой металлический цилиндр, к которому присоединяется к отрицательному полюсу источника питания постоянного тока, а центральным электродом служит прямой штырь, присоединенный к положительному полюсу источника питания. Через тонкое слюдяное окошко частицы попадают в объем камеры. Попадая в камеру, заряженные частицы и фотоны ионизируют молекулы газа. Образовавшиеся ионы притягиваются к электродам под действие электрического поля. В процессе собирания ионов формируется импульс напряжения, который регистрируется.




Рис. 4.8.

Зависимость импульса напряжения, которое характеризует число собираемых пар ионов от приложенного напряжения, показана на рисунке 4.8. Область напряжений до $\approx 200 \div 250 B$ является диапазоном соответствующим ионизационной камере. Главным требованием в этом диапазоне напряжении является не допустить вторичной ионизации молекул газа, но при этом не дать процессам рекомбинации ионов препятствовать сбору ионов разного знака. Для образования одной ионной пары требуется энергия порядка $32\ эB$. Т.к. ионизация от одной частицы очень мала, ионизационная камера детектирует только всплески числа частиц, а не индивидуальные частицы.

*Пропорциональный счетчик.* Второй тип газоразрядного счетчика, представляющего собой усовершенствование ионизационной камеры – это пропорциональный счетчик. Для такого счетчика на электроды подается более высокое напряжение, как показано на рисунке 4.8. В следствии этого первоначальные ионы образованные при пролете частицы через объем счетчика ускоряются до энергий, достаточных, что бы создать другие ионы при столкновении с нейтральными молекулами. Полный заряд в этом случае в сравнении с

ионизационной камерой, собираемый от каждой пролетающей частицей оказывается большим, чем вначале образованный заряд. Однако этот заряд пропорционален первичному заряду. Высота импульса, в пересчете в пары ионов, как представлено на рисунке 4.8, пропорциональна энергии налетающей частицы. Пропорциональный счетчик не только считает налетающие частицы, но также измеряет их энергию.

*Счетчик Гейгера –Мюллера.* В случае сильного электрического поля, которое может быть достигнуто применением очень тонкого одного из электродов, например анода. возможно зарождение так называемой лавины, в которой практически весь газ в пространстве около этого электрода ионизируется. Это приводит к появлению очень сильного импульса напряжения (в пересчете на пары ионов, как видно из рисунка 4.8) по сравнению с двумя предыдущими типами детекторов счетчиков. Высота импульса в счетчике Гейгера-Мюллера не зависит от степени ионизации возникшей первоначально от влетевшей частицы. Камера может сработать даже в случае появления единичного иона в окрестности электрода с высоким электрическим полем. Обычно в объем добавляются пары органических веществ, например спирта для гашения электрического разряда. Другим механизмом гашения разряда в счетчике Гейгера-Мюллера является формирование «чехла» медленных положительно заряженных ионов (из-за высокой подвижности электронов, последние намного быстрее покидают область пространства лавины вблизи анода), который эффективно увеличивает диаметр анода, что автоматически уменьшает величину электрического поля и гасит лавины. Счетчики данного типа не различают заряженные частицы по типам и не дают возможность измерять их энергию. При приложении к электродам напряжения выше $1000\,B$ начинается непрерывный электрический разряд с пробоем газа.

*Сцинтилляционный счетчик.* Имеются вещества, которые отвечают вспышками света на пролет в них быстрой заряженной элементарной частицы. Это вещества так называемые сцинтилляторы. Это могут быть кристаллы, жидкости, пластики. Все сцинтилляторы обладают «оптическими» энергетическими уровнями, которые могут возбуждаться кулоновским полем пролетающей частицы. Например, в качестве добавки в чрезвычайно чистый материал, которая создает оптические уровни, используют кристаллы йодистого натрия с добавками таллия. Сцинтилляционные счетчики могут быть изготовлены больших размеров. Большие размеры позволяют зарегистрировать чрезвычайно слабые сигналы например при регистрации нейтрино. Количества света, испущенного сцинтиллятором обычно очень мало для регистрации его, например, фотопластинкой. Поэтому свет концертируют и направляют на чувствительные фотоэлектронные умножители, принцип которых базируется на фотоэффекте. В результате усиления результирующий ток фотоумножителя пропорционален количеству собранного света, и в свою очередь пропорционален энергии выделенной заряженной частицей в сцинтилляторе.

*Черенковский счетчик.* Самая большая скорость, которая существует в природе – это скорость света в вакууме. Обычно если частица имеет энергию порядка или больше своей энергии покоя, то её скорость в вакууме близка к скорости света. Очевидно, что до момента потери определенного количества энергии частица будет двигать с этой – же скоростью в веществе. Для света ситуация другая – как только свет попадает в вещество скорость уменьшается в $n$ раз. ($n-$показатель преломления среды, причем $n>1$), т.е. скорость света в веществе равна:

$$\upsilon = \frac{c}{n}$$

Поэтому может случится так, что частица будет двигаться в среде быстрее чем скорость света в данной среде. В этом случае частица будет испускать электромагнитные волны в форме видимого света. Это излучение открыл в 1934 г. П.А. Черенков. Эффект Черенкова можно использовать для детектирования высокоэнергетических частиц. Свет в эффекте Черенкова излучается в узком конусе в направлении движения частицы. Изменяя показатель преломления прозрачного вещества (или газа) есть возможность создания черенковского счетчика с варьируемым порогом энергии частицы.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Акоста В., Кован К., Грэм Б. Основы современной физики. Перевод с английского. Москва «Просвещение» 1981г., 495 с.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. Учебное пособие в 3-х томах. –М.: Наука 1987 г. - 320 с.
3. Трофимова Т.И. Кур физики. – М.:Высшая школа. – 2003. – 542 с.